

UNIVERSITÉ DE DROIT, D'ÉCONOMIE ET DES SCIENCES
D'AIX-MARSEILLE (AIX-MARSEILLE III)

N° attribué par la bibliothèque

Titre :

**TRAITEMENT DU SIGNAL TENSORIEL
APPLICATION AUX IMAGES EN COULEUR
ET AUX SIGNAUX SISMQUES**

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE DROIT, D'ÉCONOMIE ET DES
SCIENCES D'AIX-MARSEILLE

Discipline : Traitement du Signal et des Images

Présentée et soutenue publiquement par :

Damien MUTI

le **2 décembre 2004**

Directeur de thèse : Pr. Salah BOURENNANE
École Doctorale : Physique et Sciences de la Matière

JURY :

M. Jean-Louis LACOUME (examineur)
M. Eric MOREAU (Rapporteur)
M. Yide WANG (Rapporteur)
M. Jaques BLANC-TALON (examineur)
M. Mireille GUILLAUME (examineur)
M. Claude AMRA (examineur)
M. Salah BOURENNANE (Directeur de thèse)

ANNEE : 2004

Table des matières

Notations mathématiques	1
Abréviations	3
Introduction	5
1 Décompositions tensorielles de TUCKER3 et PARAFAC/CANDECOMP	9
1.1 Définition mathématique d'un tenseur	10
1.2 Propriétés des tenseurs et opérateurs tensoriels	11
1.2.1 Dépliante du tenseur $\mathcal{A}$	11
1.2.2 Opérateur n -mode produit $\times_n$	12
1.2.3 Produit scalaire tensoriel	13
1.2.4 Norme de Frobenius d'un tenseur	13
1.2.5 Produit extérieur $\circ$	13
1.2.6 Produit de Khatri-Rao $ \otimes $	14
1.2.7 Rappels sur les calculs matriciels et le produit de Kronecker	14
1.3 Définition des rangs d'un tenseur	15
1.3.1 Rang classique	15
1.3.2 Rang n -modal K_n	16
1.3.3 Rang- $(K_1, \dots, K_N)$	17
1.4 Décomposition de Tucker3	17
1.4.1 Modèle de la décomposition de TUCKER3	17
1.4.2 Détermination du modèle de décomposition de TUCKER3	18
1.4.3 HOSVD	21
1.4.4 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$: algorithme TUCKALS3	23
1.4.5 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, n -mode produit et filtrage n -modal	24
1.4.6 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ et ACP multimodale	25

1.5	Décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP	26
1.5.1	Définition de la décomposition PARAFAC/CANDECOMP, et approximation de rang R d'un tenseur	26
1.5.2	Algorithme PARAFAC ALS	27
1.5.3	État de l'art sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale et l'approximation de rang un d'un tenseur	27
1.5.4	Quelques domaines d'application	28
1.6	Conclusion du chapitre	29
2	Influence des rangs n-modaux dans l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris	31
2.1	Modélisation tensorielle des signaux MM	33
2.1.1	Images en niveaux de gris	33
2.1.2	Images multicomposantes	34
2.1.3	Séquence d'images	35
2.1.4	Ondes sismiques polarisées	36
2.2	Présentation du problème	38
2.2.1	Rappel du cas bidimensionnel : influence du rang sur l'approximation d'une image en niveaux de gris et compression	38
2.2.2	Extension au cas des données MM : utilisation de l'approximation tensorielle de TUCKER3	39
2.2.3	Objectif de l'étude	40
2.3	Influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle d'images en couleur	41
2.3.1	Exemples traités	41
2.3.2	Évolution de l'ERR en fonction des paramètres	42
2.3.3	Lien entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ associés à une ERR donnée et le contenu d'une image en couleur	53
2.4	Influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle de séquences d'images en niveaux de gris	56
2.4.1	Exemples traités	56
2.4.2	Évolution de l'ERR en fonction des paramètres	58
2.4.3	Lien entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ associés à une ERR donnée et les positions de l'objet dans une séquence	65
2.5	Conclusion du chapitre	66
3	Comparaison de la PACA-K_{PACA} et de la HOSVD-(K, K, K_3) dans l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris	69
3.1	État de l'art des méthodes d'approximation des données MM basées sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP	70

3.1.1	Approximation par PACA d'une séquence d'images en niveaux de gris	71
3.1.2	Décomposition par PACA d'une image en couleur et contrainte de positivité	71
3.2	Protocole expérimental et erreur de reconstruction relative	72
3.2.1	Méthode d'approximation par PACA- K_{PACA}	72
3.2.2	Critère de comparaison : l'ERR	72
3.2.3	Définition du rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ d'un tenseur de données MM associé à un seuil sur l'ERR	72
3.3	Comparaison des approximations par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} d'images en couleur	73
3.3.1	Prise en compte des composantes de couleur dominantes par la PACA- K_{PACA}	73
3.3.2	Relations entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$	74
3.3.3	Relation entre le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ et la structure spatiale d'une image . . .	74
3.4	Comparaison des approximations par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} de séquences d'images en niveaux de gris	79
3.4.1	Séquence1 - Mouvement de translation horizontale	79
3.4.2	Séquence2 - Mouvement de translation diagonale	80
3.4.3	Séquence3 - Mouvement de rotation	81
3.5	Charge de calcul	88
3.6	Conclusion du chapitre	89
4	Filtrage multimodal : élaboration de nouvelles méthodes tensorielles pour les signaux MM bruités	91
4.1	Présentation du problème, hypothèses et objectifs de l'étude	92
4.1.1	Modèle de signal MM bruité	92
4.1.2	Hypothèse de séparabilité	93
4.2	État de l'art sur le traitement des données tensorielles	93
4.2.1	Traitement par tranche bidimensionnelle	93
4.2.2	Méthode par sous-espaces adaptée aux données trimodales	94
4.3	Cas d'un bruit additif gaussien blanc	95
4.3.1	Estimation du tenseur signal par filtrage de Wiener multimodal	95
4.3.2	Simulations et résultats du filtrage de Wiener multimodal	103
4.3.3	Conclusion sur le filtrage de Wiener multimodal	110
4.4	Cas d'un bruit additif gaussien corrélé	112
4.4.1	Moments d'ordre 2 dans l'ACP multimodale obtenue par LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$	112

4.4.2	Méthode proposée : amélioration de l'algorithme TUCKALS3 par les cumulants d'ordre 4	113
4.4.3	Rappel sur les cumulants d'ordre 4	113
4.4.4	Approximation de rang inférieur du cumulant d'ordre 4	114
4.4.5	Matrice tranche de cumulant d'ordre 4	115
4.4.6	Apport de la matrice tranche de cumulant par rapport au tenseur cumulant d'ordre 4	116
4.4.7	Algorithme proposé	117
4.4.8	Simulations et résultats	118
4.4.9	Conclusion sur le filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) basée sur les cumulants d'ordre 4	125
4.5	Conclusion du chapitre	125
Conclusion générale et perspectives		129
A Résultats sur l'influence des rangs n-modaux sur l'ERR donnée par la troncature de la HOSVD et la LRTA-(K_1, K_2, K_3) - Chapitres 2 et 3		133
A.1	Simulation sur les images en couleur	133
A.2	Simulation sur les séquences d'images	139
B Calculs associés aux filtres de Wiener n-modaux - Chapitre 4		145
B.1	Expression analytique du Wiener filter n -modal	145
B.2	Filtre de Wiener n -modal associé à l'hypothèse sur la forme de la dépliante sur le n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$	148
Liste des figures		153
Bibliographie		159

Notations mathématiques

$x \in \mathbb{R}$	Scalaire.
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{I_1}$	Vecteur de dimension I_1 .
$X \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$	Matrice de dimension $I_1 \times I_2$.
$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$	Tenseur d'ordre $N \geq 3$.
I_n	Dimension de l'espace vectoriel n -modal E_n associé à $\mathcal{X}$.
$x_{i_1 \dots i_N}$	Élément d'indice $(i_1, \dots, i_N)$ du tenseur $\mathcal{X}$.
X_n	Matrice dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{X}$, de taille $I_n \times I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N$.
$\text{trace}(X)$	Trace de la matrice X .
$\text{Rang}(X)$	Rang de la matrice X .
$\text{Rang}(\mathcal{X})$	Rang du tenseur $\mathcal{X}$.
$\text{Rang}_n(\mathcal{X})$	Rang n -modal du tenseur $\mathcal{X}$, i.e., rang de la matrice dépliant X_n .
K_n	Rang n -modal d'un tenseur d'ordre N , associé à la décomposition tensorielle de TUCKER3 ou rang n -modal impliqué dans les approximations LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ et HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur d'ordre N .
K_{PACA}	Rang d'un tenseur d'ordre N associé à la décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP ou rang impliqué dans l'approximation tensorielle PACA- K_{PACA} .

- $\cdot^T$ Transposition matricielle.
- $\times_n$ n -mode produit (défini à la relation (1.6)).
Généralise le produit matriciel entre une matrice et les vecteurs n -modaux d'un tenseur.
- Produit extérieur entre plusieurs vecteurs n -modaux (défini à la relation (1.16)).
- $\otimes$ Produit tensoriel de Kronecker (défini à la relation (1.21)).

Abréviations

MM	Multidimensionnel(le)(s) et Multicomposante(s).
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières.
EVD	Décomposition en Valeurs propres.
HOSVD	Décomposition en Valeurs Singulières d'un tenseur d'ordre supérieur.
HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$	Troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD d'un tenseur d'ordre N .
LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$	Approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur d'ordre N .
PACA	Décomposition tensorielle de PARAFAC/CANDECOMP.
PACA- K_{PACA}	Approximation de rang- K_{PACA} inférieur d'un tenseur, basée sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP.
SVDcc- K_{SVD}	Approximation matricielle de rang- K_{SVD} inférieur effectuée sur chaque « tranche » bidimensionnelle issue d'un tenseur d'ordre trois en fixant l'indice 3-modal du tenseur.
LRTA- $\mathcal{C}$	ACP multimodale obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) basée sur le cumulante d'ordre quatre $\mathcal{C}$.
LRTA- $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$	ACP multimodale obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) basée sur la tranche de cumulante d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ dont l'élément de référence est q dans chaque n -mode du tenseur de données MM bruitées.
LRTA- $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3}$	ACP multimodale obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) basée sur la tranche de cumulante d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_n}$ dont l'élément de référence est q_n dans chaque n -mode du tenseur de données MM bruitées.

Introduction

DANS la nature, de nombreux phénomènes dépendent de plusieurs grandeurs physiques telles que les grandeurs associées à l'espace (trois dimensions), le temps et des grandeurs dérivées telles que la longueur d'onde, la couleur ou la polarisation d'une onde. Pour enregistrer, étudier et extraire des informations utiles de ces phénomènes, différents types de capteurs multidimensionnels et multicomposantes (MM) sont apparus au cours de ces cinquante dernières années, avec une accélération accrue ces dernières années (capteurs multispectraux ou multipolaires).

D'un point de vue numérique, les signaux MM peuvent être modélisés par des tableaux de valeurs à plusieurs entrées qui généralisent les tableaux matriciels à deux entrées. Chacune des entrées de ce tableau multidimensionnel est associée à une grandeur physique (espace, temps, couleur, etc...) échantillonnée dont dépend le signal MM étudié. Ces tableaux multidimensionnels sont classiquement appelés « tenseurs d'ordre supérieur » dans lequel l'ordre du tenseur correspond au nombre N de dimensions du tableau correspondant. Ainsi, chaque information numérique élémentaire du tenseur de données est accessible via N indices. En adoptant ce modèle, les images en niveaux de gris sont modélisées par des tenseurs d'ordre deux (des matrices), les images en couleurs ou multispectrales, les séquences d'images en niveaux de gris et les signaux sismiques polarisés, par des tenseurs d'ordre trois, et les séquences d'images en couleur, par des tenseurs d'ordre quatre.

Les traitements classiques des signaux MM ont souvent procédé à un découpage du tenseur correspondant en « tranches » bidimensionnelles ou à un réarrangement des données sous une forme vectorielle, de sorte que les techniques de traitement existantes puissent être appliquées. Dans le cadre d'un traitement des données par des méthodes algébriques, ces techniques reposent généralement sur la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD [23]) de la matrice de covariance ou sur les statistiques d'ordre supérieur [38, 50, 64, 65, 84, 52]. Cependant, la spécificité des signaux MM implique que les techniques classiques de traitement du signal ne sont plus performantes, car elles n'exploitent pas toute la richesse de l'information qu'ils renferment. En effet, le découpage ou le réarrangement des données peut provoquer une perte d'information par rapport au tenseur global du fait que la possibilité d'étudier les relations inter-composantes du tenseur peut être perdue.

Dans notre étude, pour palier ce problème, nous proposons de considérer le tenseur de données de façon globale. Nous nous plaçons aussi dans le cadre d'un traitement algébrique des données. Par conséquent nous sommes amenés à utiliser des outils d'algèbre multilinéaire, et notamment des outils de décomposition tensorielle, qui généralisent la SVD et l'approximation de rang inférieur d'une matrice sur lesquels sont basés les traitements algébriques classiques, élaborés, par exemple, en sismique [21, 22, 26, 27, 28, 45, 48, 4, 91, 12, 96, 11].

La généralisation de la SVD matricielle [23] aux tenseurs n'est pas triviale. En effet, pour

une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ quelconque, la modélisation de la SVD sous la forme¹ :

$$A = USV^T, \quad (1)$$

et la décomposition canonique de cette matrice sous la forme d'une somme de K tenseurs de rang un (K étant le rang de la matrice), sont équivalentes. L'équivalence entre la forme matricielle et la forme canonique de la SVD n'est plus nécessairement vérifiée, dans le cas tensoriel, car il existe plusieurs définitions du rang d'un tenseur.

Deux modèles de décomposition tensorielle basés sur des définitions différentes du rang, sont classiquement utilisés pour généraliser la SVD matricielle :

1. Le premier modèle est la « décomposition tensorielle de TUCKER3 » [86]. Elle permet de définir la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD) [17], et l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur d'un tenseur (LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$) [18]. L'obtention de ce modèle nécessite un processus itératif basé sur les moindres carrés alternés, appelé algorithme TUCKALS3 [35, 83].
2. Le deuxième modèle effectue une décomposition canonique d'un tenseur, en une somme de tenseurs de rang un, et s'appelle « décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOM » [8, 25]. Son obtention nécessite aussi un processus numérique basé sur les moindres carrés alternés appelé algorithme PARAFAC ALS [7, 37, 71, 72, 73, 25, 8, 6, 16].

Plusieurs études prenant en compte une modélisation tensorielle des données MM ont récemment été proposées :

1. En sismique, une modélisation des données sous la forme de tenseurs d'ordre trois, et un traitement algébrique basé sur la HOSVD ont récemment été employés pour améliorer la séparation des ondes sismiques polarisées [40, 39].
2. En traitement d'images plusieurs études ont aussi fait usage de la HOSVD pour la reconnaissance des expressions d'un visage. En effet, dans ces dernières études, une modélisation des données sous la forme d'un tenseur d'ordre trois ou cinq peut être adoptée [90, 89].
3. Enfin, la décomposition PARAFAC/CANDECOM a été aussi utilisée pour la décomposition d'images en couleur [92] et la compression par approximation de rang inférieur de tenseurs associés à des séquences d'images en niveaux de gris [47].

En nous basant sur les études existantes, nous proposons d'organiser cette thèse en deux principales parties consacrées respectivement aux données tensorielles non bruitées et aux données tensorielles bruitées. Nous présentons donc ce mémoire de la façon suivante :

Le **chapitre 1** est consacré à la présentation des modèles de décomposition tensorielle de TUCKER3 et PARAFAC/CANDECOMP sur lesquels repose notre étude, et qui constituent une analyse en composantes principales effectuée simultanément sur tous les n -modes, que nous appelons « ACP multimodale ».

Après avoir rappelé quelques propriétés et définitions sur les tenseurs et les principaux opérateurs tensoriels, nous proposons de synthétiser les calculs relatifs à la décomposition tensorielle de TUCKER3 amenant à la HOSVD et à la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$. Nous présentons

¹Dans laquelle $U \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1}$ et $V \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_2}$ sont les matrices unitaires contenant les vecteurs singuliers gauches et droites, et $S \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ est la matrice pseudo-diagonale contenant les valeurs singulières de la matrice A , appelée « matrice noyau ».

ensuite l'algorithme TUCKALS3 qui permet d'obtenir cette décomposition. Puis nous insistons sur la différence qui existe entre la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ obtenue grâce à l'algorithme TUCKALS3 et la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD, notée HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$, qui peut être considérée comme une forme approximée de la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, et sur laquelle reposent certaines méthodes de traitement des données tensorielles. Nous présentons aussi les principes de l'ACP multimodale que réalise la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$.

Nous rappelons enfin, brièvement, les principes de la décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP et l'algorithme PARAFAC ALS qui permet d'obtenir cette décomposition. Nous présentons l'approximation tensorielle de rang- K_{PACA} inférieure basée sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP que nous notons par PACA- K_{PACA} .

Dans le chapitre **chapitre 2**, nous effectuons tout d'abord une brève présentation des différents types de signaux MM ainsi que leur modélisation tensorielle. Nous présentons notamment les images en couleur, les séquences d'images en niveaux de gris et les signaux sismiques multicomposantes qui sont modélisés par des tenseurs d'ordre trois.

La suite du chapitre se concentre sur l'étude de l'influence des rangs n -modaux K_1 , K_2 et K_3 dans l'approximation (i.e. la compression avec perte d'information) d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris. Notre étude est basée sur l'Erreur de Reconstruction Relative (ERR) définie à partir de distances quadratiques entre tenseurs. En étudiant :

1. les surfaces représentant l'évolution de l'ERR(K_1, K_2, K_3), en fonction de K_1 et K_2 , à K_3 fixé,
2. et les courbes représentant l'évolution de l'ERR(K, K, K_3), en fonction de K , à K_3 fixé,

nous dégageons quelques propriétés sur la manière dont peuvent être choisis les rangs n -modaux K_1 et K_2 des approximations LRTA- (K_1, K_2, K_3) et HOSVD- (K_1, K_2, K_3) en fonction de l'ERR correspondante. Nous établissons enfin, dans quelle mesure l'information contenue dans une image en couleur ou une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné.

Le but du **chapitre 3** est d'effectuer la comparaison entre les méthodes d'approximations tensorielles basées sur la décomposition de TUCKER3 (LRTA- (K, K, K_3) et HOSVD- (K, K, K_3)), et la méthode d'approximation tensorielle de rang- K_{PACA} inférieure basée sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP (PACA- K_{PACA}). Cette comparaison est effectuée en utilisant les mêmes images en couleur et séquences d'images qu'au chapitre 2, et en comparant les courbes représentant :

1. l'évolution de l'ERR(K, K, K_3), en fonction de K , à K_3 fixé,
2. et l'évolution de l'ERR(K_{PACA}), en fonction du rang K_{PACA} .

Nous déterminons alors, dans quelle mesure l'information contenue dans une image en couleur ou une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur du rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ pour lesquels l'ERR obtenue par PACA- K_{PACA} est inférieure à un seuil donné. Nous étudions, ensuite, les relations possibles qui existent entre les rangs n -modaux $\hat{K}$ et $\hat{K}_3$ et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$.

Nous proposons enfin, pour les exemples traités, une brève étude sur la charge de calcul supportée par chacune des méthodes.

Le **chapitre 4** est consacré au filtrage des données MM bruitées. Nous divisons les études réalisées dans ce chapitre en deux parties :

1. La première partie traite le cas du filtrage multimodal des données MM bruitées par un bruit additif gaussien *blanc*. Sous cette hypothèse, nous proposons de déterminer la forme des filtres n -modaux matriciels optimaux H_n , qui minimisent l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré et le tenseur signal estimé, obtenu en appliquant sur chaque n -mode du tenseur de données bruitées, le filtre H_n , par le biais de l'opérateur n -mode produit. Par extension du cas monodimensionnel, les filtres H_n , $n = 1, \dots, N$, ainsi déterminés sont appelés « filtres de Wiener n -modaux ».

Nous montrons que ces filtres dépendent des dimensions K_n , $n = 1, \dots, N$, des sous-espaces signaux n -modaux, supposés connus *a priori* et que, de même que pour la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, leur détermination nécessite un processus numérique basé sur les moindres carrés alternés.

Nous proposons, enfin, un algorithme permettant de réaliser cette détermination, et appliquons ce nouveau filtrage multimodal au débruitage d'images en couleur et de signaux sismiques multicomposantes.

2. La seconde partie est consacrée au filtrage des données MM bruitées par un bruit additif gaussien *corrélé*. En analysant le processus effectuant l'ACP multimodale classique, nous mettons en évidence à quelle étape de l'algorithme TUCKALS3 sont calculées les matrices de covariance associées aux n -modes du tenseur de données bruitées. Nous utilisons alors les statistiques d'ordre supérieur, et notamment le cumulants d'ordre quatre afin d'éliminer les composantes gaussiennes du bruit.

Nous proposons un algorithme améliorant l'ACP multimodale classique dont l'idée principale est de remplacer la matrice de covariance impliquée dans la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, par la matrice tranche de cumulants d'ordre quatre.

Nous testons enfin les performances de cet algorithme en réalisant le débruitage d'images en couleur et de signaux sismiques multicomposantes bruités par un bruit additif gaussien corrélé.

CHAPITRE

1

Décompositions
tensorielles de TUCKER3
et PARA-
FAC/CANDECOMP

LE but de ce chapitre est de présenter les outils d'algèbre linéaire et multilinéaire qui sont utilisés dans le traitement des données MM modélisées par des tenseurs d'ordre supérieur. Il s'agit d'un chapitre de synthèse des méthodes existantes qui sont décrites en détail dans les références bibliographiques suivantes [35, 34, 17, 18, 16, 25, 8, 79, 33, 31, 95].

Nous donnons tout d'abord, à la section 1.1, la définition mathématique d'un tenseur. Nous présentons à la section 1.2, quelques propriétés des tenseurs et opérateurs tensoriels, notamment les matrices dépliantes d'un tenseur, le n -mode produit qui généralise le produit matriciel sur les tenseurs, le produit scalaire et la norme de Frobenius tensoriels et le produit extérieur tensoriel. La section 1.3 présente les différentes définitions du rang d'un tenseur sur lesquelles sont construites la décomposition de TUCKER3 et la décomposition PARAFAC/CANDECOMP qui généralisent la SVD matricielle aux tenseurs d'ordre supérieur.

Nous présentons ensuite, à la section 1.4, la décomposition de TUCKER3. Les calculs permettant l'obtention de cette décomposition y sont aussi résumés. Ils correspondent à une minimisation tensorielle des moindres carrés sur laquelle repose l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur d'un tenseur (LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$) et la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD). Ces calculs nous permettent d'autre part d'interpréter la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ en terme d'ACP multimodale. Ils nous permettent enfin de mieux comprendre, dans le chapitre 4, comment il nous a été possible d'améliorer un algorithme de décomposition tensorielle grâce aux statistiques d'ordre supérieur pour permettre le filtrage de données MM bruitées par un bruit corrélé.

Enfin, la section 1.5 présente d'une manière succincte la décomposition PARAFAC/CANDECOMP ainsi qu'un état de l'art de son implémentation.

1.1 Définition mathématique d'un tenseur

Dans tout ce manuscrit, les données étudiées sont supposées appartenir au corps des réels $\mathbb{R}$. Nous considérerons qu'un tenseur d'ordre N représente un tableau multidimensionnel dont chaque élément est accessible via N indices $(i_1, \dots, i_N)$. Ce tenseur est noté par :

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N} \quad (1.1)$$

et chacun de ses éléments est noté $a_{i_1 \dots i_N}$. Chaque dimension du tenseur est appelée « n -mode » en référence au $n^{\text{ième}}$ indice du tenseur [34, 16, 17, 18]. Un tenseur d'ordre zéro est un scalaire, un tenseur d'ordre un est un vecteur et un tenseur d'ordre deux est une matrice.

D'un point de vue mathématique, et dans le cas de l'ordre deux, une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ est la représentation, sous la forme d'un tableau de valeurs, d'une forme bilinéaire φ construite sur deux espaces vectoriels $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$, de dimensions respectives I_1 et I_2 [43, 42] :

$$\begin{aligned} \varphi : E^{(1)} \times E^{(2)} &\mapsto \mathbb{R} \\ \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{e}_{i_2}^{(2)} \right) &\mapsto \varphi \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{e}_{i_2}^{(2)} \right) = a_{i_1 i_2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

dans laquelle $a_{i_1 i_2}$ est l'élément de la ligne i_1 et de la colonne i_2 de la matrice A . À un tenseur d'ordre deux est donc associé deux espaces vectoriels correspondant à chacun des n -modes (lignes, colonnes). Leur dimension respective (I_1 et I_2) est égale au nombre d'éléments du n -mode auquel ils sont associés.

Dans le cas d'un ordre N supérieur à deux, un tenseur réel $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ est la représentation sous la forme d'un tableau multidimensionnel de valeurs, d'une forme multilinéaire φ construite sur N espaces vectoriels $E^{(1)}, \dots, E^{(N)}$ de dimension respectives $I_1, \dots, I_N$ [43, 42] :

$$\begin{aligned} \varphi : E^{(1)} \times \dots \times E^{(N)} &\mapsto \mathbb{R} \\ \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{i_N}^{(N)} \right) &\mapsto \varphi \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{i_N}^{(N)} \right) = a_{i_1 \dots i_N}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

dans lequel $a_{i_1 \dots i_N}$ est l'élément du tenseur $\mathcal{A}$ situé aux indices n -modaux $(i_1 \dots i_N)$. Il est donc possible d'associer à un tenseur d'ordre N , N espaces vectoriels $E^{(1)}, \dots, E^{(N)}$. Dans la suite, quel que soit $n = 1, \dots, N$, l'espace $E^{(n)}$ est dénommé « espace vectoriel n -modal ». Dans le cas d'un tenseur réel $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, $E^{(n)} = \mathbb{R}^{I_n}$, $\forall n = 1, \dots, N$.

Les espaces vectoriels n -modaux ainsi définis, sont largement utilisés dans la suite de notre étude. Ils constituent la base conceptuelle sur laquelle repose tous les traitements proposés pour les données MM. Ces traitements sont basés sur l'extension aux tenseurs de la SVD matricielle.

Dans la section suivante, nous présentons les principaux opérateurs tensoriels que nous sommes amenés à manipuler tout le long de ce manuscrit.

1.2 Propriétés des tenseurs et opérateurs tensoriels

1.2.1 Dépliante du tenseur $\mathcal{A}$

Afin d'étudier les propriétés des données multidimensionnelles dans une direction n -modale particulière, c'est-à-dire dans une dimension physique particulière, définissons la matrice dépliante [39] dans le n -mode du tenseur $\mathcal{A}$, notée $A_n \in \mathbb{R}^{I_n \times M_n}$, dans laquelle :

$$M_n = I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N. \quad (1.4)$$

Elle est composée des M_n vecteurs colonnes I_n -dimensionnels obtenus en fixant les $N - 1$ indices i_m , $m \neq n$ et en faisant varier l'indice n -modal i_n de 1 à I_n (voir figure 1.1).

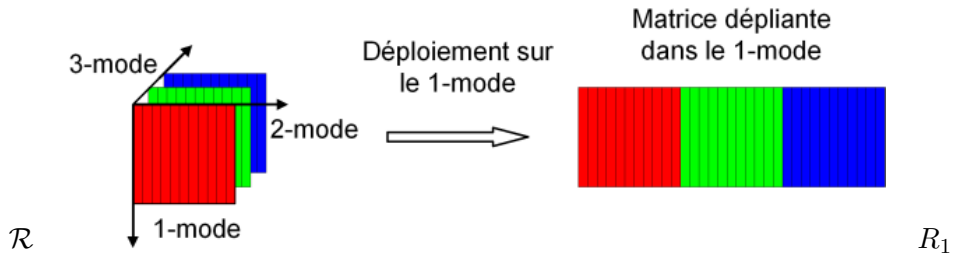


Figure 1.1 — Matrice dépliante $R_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 I_3}$ dans le 1-mode du tenseur $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. Les dépliantes dans le 2-mode et 3-mode s'obtiennent en effectuant une permutation circulaire sur les n -modes du tenseur initial $\mathcal{R}$.

Caractérisons de façon plus précise l'espace vectoriel n -modal $E^{(n)}$ associé au n -mode du tenseur $\mathcal{A}$ évoqué dans la section précédente. Par définition, l'espace vectoriel n -modal de

dimension I_n , associé au n -mode du tenseur $\mathcal{A}$, est généré par les vecteurs colonnes de la matrice A_n , dépliant du tenseur $\mathcal{A}$ dans le n -mode.

Par la suite, les vecteurs colonnes de la matrice A_n seront appelés « vecteurs n -modaux » du tenseur $\mathcal{A}$.

Remarque - Notons que pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$, la dépliant dans le 1-mode de la matrice A n'est autre que la matrice A et la dépliant dans le 2-mode est la matrice A^T .

1.2.2 Opérateur n -mode produit $\times_n$

L'opérateur $\times_n$ définit le n -mode produit. Il généralise le produit matriciel au produit entre un tenseur et les vecteurs n -modaux dans un n -mode particulier. Toutes ses propriétés peuvent être retrouvées dans [18]. Nous présentons ici les principales.

Considérons un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ et une matrice $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$. Quelles que soient les valeurs de I_n et J_n prises dans $\mathbb{N}^*$, et quel que soit $n \in \{1, \dots, N\}$, le n -mode produit entre $\mathcal{A}$ et $H^{(n)}$ donne le tenseur :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_n H^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_N}. \quad (1.5)$$

Chaque élément d'indice $(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$ du tenseur $\mathcal{B}$ est donné par :

$$b_{i_1 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_N} h_{j_n i_n}^{(n)}, \quad (1.6)$$

avec $i_k \in \{1, \dots, I_k\}$, quel que soit $k \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$, et j_n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$.

Nous pouvons généraliser l'écriture (1.5) aux n -mode produits entre le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ et les matrices $H^{(n)} \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$, $n = 1, \dots, N$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 H^{(1)} \dots \times_N H^{(N)} \in \mathbb{R}^{J_1 \times \dots \times J_N}. \quad (1.7)$$

Chaque élément d'indice $(j_1, \dots, j_N)$ du tenseur $\mathcal{B}$ est donné par :

$$b_{j_1 \dots j_N} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} a_{i_1 \dots i_N} h_{j_1 i_1}^{(1)} \dots h_{j_N i_N}^{(N)}, \quad (1.8)$$

avec $j_k \in \{1, \dots, J_k\}$ et $J_k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k = 1, \dots, N$.

Le n -mode produit vérifie les propriétés suivantes [16, 17] :

1. Quel que soit le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, et les matrices $U \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$ et $V \in \mathbb{R}^{K_n \times J_n}$:

$$(\mathcal{A} \times_n U) \times_n V = \mathcal{A} \times_n (VU). \quad (1.9)$$

2. Quel que soit le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, et les matrices $U \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$ et $V \in \mathbb{R}^{J_m \times I_m}$:

$$(\mathcal{A} \times_n U) \times_m V = (\mathcal{A} \times_m V) \times_n U. \quad (1.10)$$

3. Enfin, quel que soit le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, si les matrices $U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R_n}$ sont unitaires $\forall n = 1, \dots, N$ alors [35, 34, 16, 17] :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)} \dots \times_N U^{(N)} \Leftrightarrow \mathcal{B} \times_1 U^{(1)T} \dots \times_N U^{(N)T} = \mathcal{A}. \quad (1.11)$$

1.2.3 Produit scalaire tensoriel

Le produit scalaire tensoriel est défini de la façon suivante. Soient deux tenseurs d'ordre N : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$. Le produit scalaire entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est donné par :

$$\langle \mathcal{A} | \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} a_{i_1, \dots, i_N} b_{i_1, \dots, i_N}. \quad (1.12)$$

Une propriété importante du produit scalaire tensoriel est que :

$$\langle \mathcal{A} | \mathcal{B} \rangle = \text{trace} [A_n B_n^T], \forall n = 1, \dots, N, \quad (1.13)$$

dans laquelle A_n et B_n sont les matrices dépliantes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans le n -mode.

1.2.4 Norme de Frobenius d'un tenseur

La norme de Frobenius du tenseur $\mathcal{A}$, notée $\|\mathcal{A}\|$, héritée du produit scalaire tensoriel défini précédemment, est donnée par :

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_N} a_{i_1, \dots, i_N}^2 = \text{trace} [A_n A_n^T], \forall n = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

La distance quadratique entre les tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, peut donc être définie par la quantité $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2$.

1.2.5 Produit extérieur $\circ$

Le produit extérieur entre les deux vecteurs $\mathbf{e}^{(1)} \in E^{(1)}$ et $\mathbf{e}^{(2)} \in E^{(2)}$ définit classiquement une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ de rang 1 :

$$A = \mathbf{e}^{(1)} \circ \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)T}, \quad (1.15)$$

où I_1 est la dimension de l'espace $E^{(1)}$ et I_2 est la dimension de l'espace $E^{(2)}$.

Dans le cas général le produit extérieur de plusieurs vecteurs $\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(N)}$ appartenant respectivement aux espaces vectoriels $E^{(1)}, \dots, E^{(N)}$, de dimension $I_1, \dots, I_N$, définit le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ de rang 1¹ :

$$\mathcal{A} = \mathbf{e}^{(1)} \circ \mathbf{e}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{e}^{(N)}, \quad (1.16)$$

tel que, quels que soient les indices $(i_1, \dots, i_N)$, l'élément $a_{i_1, \dots, i_N}$ du tenseur $\mathcal{A}$ est défini par le produit :

$$a_{i_1, \dots, i_N} = \prod_{n=1}^N e_{i_n}^{(n)}, \quad (1.17)$$

dans lequel $e_{i_n}^{(n)}$ est la i_n ième composante du vecteur $\mathbf{e}^{(n)}$.

¹Que nous présentons en détail dans la section 1.3.

Remarque - Le produit extérieur de plusieurs vecteurs peut s'exprimer en fonction du n -mode produit défini précédemment. En effet, en considérant un scalaire λ comme un tenseur d'ordre zéro, il est possible d'écrire que λ appartient à $\mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, avec $I_n = 1, \forall n = 1, \dots, N$. λ peut donc aussi s'exprimer par : $\lambda = \lambda_{1\dots 1}$. D'autre part, il est possible de considérer que, $\forall n = 1, \dots, N$, le vecteur $\mathbf{e}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times 1}$ est une matrice comportant I_n lignes et 1 colonne. Par conséquent, le tenseur $\mathcal{A}$ défini à la relation (1.16) pondéré par le scalaire λ peut s'écrire :

$$\mathcal{B} = \lambda \cdot \mathbf{e}^{(1)} \circ \mathbf{e}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{e}^{(N)} = \lambda \times_1 \mathbf{e}^{(1)} \dots \times_N \mathbf{e}^{(N)}. \quad (1.18)$$

En effet, d'après l'expression (1.8), l'élément $b_{j_1, \dots, j_N}$ du tenseur $\mathcal{B} = \lambda \times_1 \mathbf{e}^{(1)} \dots \times_N \mathbf{e}^{(N)}$ s'exprime par :

$$b_{j_1 \dots j_N} = \sum_{i_1=1}^{I_1=1} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N=1} \lambda_{i_1 \dots i_N} e_{j_1 i_1}^{(1)} \dots e_{j_N i_N}^{(N)} = \lambda \prod_{n=1}^N e_{j_n}^{(n)}. \quad (1.19)$$

1.2.6 Produit de Khatri-Rao $|\otimes|$

Le produit de Khatri-Rao [68], noté $|\otimes|$, entre deux matrices A et B ayant le même nombre de colonnes J s'exprime par l'expression :

$$A|\otimes|B = [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_J \otimes \mathbf{b}_J], \quad (1.20)$$

dans lequel $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ sont les $n^{\text{ième}}$ vecteurs colonnes des matrices A et B , et $\otimes$ le produit tensoriel de Kronecker [6]. Étant donné deux matrices $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ et $B \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2}$, leur produit de Kronecker, noté $A \otimes B$, est une matrice de dimension $(I_1 J_1 \times I_2 J_2)$ définie de la façon suivante :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1I_2}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{I_1 1}B & \dots & a_{I_1 I_2}B \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Ce produit n'est pas commutatif, il est associatif et distributif par rapport à l'addition.

Le produit de Khatri-Rao est utilisé par la suite dans les calculs de la décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP.

1.2.7 Rappels sur les calculs matriciels et le produit de Kronecker

1.2.7.1 Produit de Kronecker et transposition

Propriété 1 - Considérons les matrices $A_k \in \mathbb{R}^{I_k \times J_k}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, et $B_k \in \mathbb{R}^{M_k \times P_k}$, $k \in \{1, \dots, N\}$. Quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$, le produit de Kronecker $\otimes$ vérifie la propriété suivante :

$$(A_1 \otimes A_2 \dots \otimes A_N)(B_1 \otimes B_2 \dots \otimes B_N) = (A_1 B_1) \otimes (A_2 B_2) \dots \otimes (A_N B_N). \quad (1.22)$$

Propriété 2 - Une deuxième propriété concerne la transposée d'un produit de Kronecker de plusieurs matrices. Quelles que soient les matrices $A_k \in \mathbb{R}^{I_k \times J_k}$, $k \in \{1, \dots, N\}$:

$$(A_1 \otimes A_2 \dots \otimes A_N)^T = (A_1^T \otimes A_2^T \dots \otimes A_N^T). \quad (1.23)$$

1.2.7.2 Dépliante dans un n -mode et n -mode produit

Considérons un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, et les matrices $U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times J_n}$, $\forall n = 1, \dots, N$. Définissons le tenseur $\mathcal{B}$ par :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)} \dots \times_N U^{(N)}. \quad (1.24)$$

Quel que soit $n = 1, \dots, N$, la matrice B_n , dépliante dans le n -mode du tenseur $\mathcal{B}$, s'exprime en fonction de la matrice A_n , dépliante dans le n -mode du tenseur $\mathcal{A}$, et des matrices $U^{(1)}, \dots, U^{(N)}$ par [35, 34] :

$$B_n = U^{(n)} A_n (U^{(1)} \otimes \dots \otimes U^{(n-1)} \otimes U^{(n+1)} \otimes \dots \otimes U^{(N)})^T. \quad (1.25)$$

D'après la propriété (1.23), la relation (1.25) peut également s'écrire :

$$B_n = U^{(n)} A_n (U^{(1)T} \otimes \dots \otimes U^{(n-1)T} \otimes U^{(n+1)T} \otimes \dots \otimes U^{(N)T}). \quad (1.26)$$

Cette propriété peut-être utilisée pour l'implémentation du n -mode produit sous une forme matricielle.

1.3 Définition des rangs d'un tenseur

Dans le cas de l'ordre deux, le rang d'une matrice joue un rôle fondamental dans sa SVD, dans sa décomposition canonique et dans son approximation de rang inférieur. Dans cette section, nous rappelons les différentes définitions du rang d'un tenseur d'ordre supérieur à deux [31, 18, 95, 33]. Ces différentes définitions permettent de généraliser la SVD matricielle aux tenseurs.

1.3.1 Rang classique

1.3.1.1 Tenseur de rang un

Considérons le tenseur d'ordre N , $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$. D'après la section 1.1, le tenseur $\mathcal{A}$ est construit sur N espaces vectoriels n -modaux : $E^{(1)}, \dots, E^{(N)}$, de dimension $I_1, \dots, I_N$. Le tenseur $\mathcal{A}$ est de rang un si, $\forall n = 1, \dots, N$, il existe N vecteurs $\mathbf{u}^{(n)} \in E^{(n)}$, tels que $\mathcal{A}$ soit le produit extérieur² de ces N vecteurs :

$$\mathcal{A} = \mathbf{u}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}^{(N)}. \quad (1.27)$$

Les propriétés de norme et du produit scalaire d'un tenseur de rang un peuvent être consultées dans [33].

1.3.1.2 Tenseur de rang R

Le concept de rang d'une matrice peut être étendu aux tenseurs d'ordre supérieur [36, 37]. La définition d'un tenseur de rang K généralise la définition matricielle. En effet, $\mathcal{A}$ est un

²Défini à la relation (1.16).

tenseur de rang K , si K est le nombre minimum de tenseurs de rang un qui, par sommation, donnent $\mathcal{A}$. Nous notons le rang du tenseur $\mathcal{A}$ par :

$$\text{Rang}(\mathcal{A}) = K. \quad (1.28)$$

Par conséquent $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ est un tenseur de rang K si, $\forall n = 1, \dots, N$, il existe K vecteurs n -modaux normés $\mathbf{u}_k^{(n)} \in E^{(n)}$, et K scalaires λ_k , $k = 1, \dots, K$, tels que :

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{u}_k^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_k^{(N)} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{A}_k. \quad (1.29)$$

La définition (1.29) du rang d'un tenseur permet d'étendre aux tenseurs la décomposition canonique d'une matrice. Plusieurs études connues sous le nom de « Parallel Factor Analysis » (PARAFAC ou analyse en facteurs parallèles) [25] et « Canonical Decomposition » (CANDECOMP ou décomposition canonique d'un tenseur) [8] ont été menées sur la détermination du rang d'un tenseur et sa décomposition en une somme minimale de tenseurs de rang un. Ces deux méthodes sont connues sous le terme de décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP.

Remarque 1 - Notons que cette définition du rang n'impose aucune contrainte sur l'orthogonalité mutuelle des tenseurs de rang un comme cela est imposé naturellement dans la SVD matricielle. Comme le notent les études [33, 95], plusieurs définitions du rang peuvent être élaborées si des contraintes supplémentaires telles que l'orthogonalité mutuelle des tenseurs de rang un sont rajoutées au modèle. Nous évoquerons ce point dans la section suivante.

Remarque 2 - Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ est toujours inférieur ou égal à $\min(I_1, I_2)$:

$$\text{Rang}(A) \leq \min(I_1, I_2). \quad (1.30)$$

Cette propriété n'est plus vérifiée dans le cas tensoriel [16, 17, 33]. En effet le rang d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ peut être tel que :

$$\text{Rang}(\mathcal{A}) > \min(I_1, \dots, I_N). \quad (1.31)$$

1.3.2 Rang n -modal K_n

Il est possible de définir le rang n -modal d'un tenseur comme étant la généralisation du rang des vecteurs colonnes et du rang des vecteurs lignes d'une matrice [16, 18]. Le rang n -modal d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, noté $\text{Rang}_n(\mathcal{A})$, est le rang de la matrice A_n , dépliant de $\mathcal{A}$ dans le n -mode :

$$\text{Rang}_n(\mathcal{A}) = \text{Rang}(A_n). \quad (1.32)$$

Quel que soit $n = 1, \dots, N$, le rang n -modal $\text{Rang}_n(\mathcal{A})$ est toujours inférieur ou égal au rang du tenseur $\mathcal{A}$ [16, 18] :

$$\forall n = 1, \dots, N, \text{Rang}_n(\mathcal{A}) \leq \text{Rang}(\mathcal{A}). \quad (1.33)$$

Dans le cas d'une matrice, les rang n -modaux (rang des vecteurs lignes et rang vecteurs des colonnes) sont égaux.

1.3.3 Rang- $(K_1, \dots, K_N)$

Enfin, un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ est de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ si quel que soit $n = 1, \dots, N$, $\text{Rang}_n(\mathcal{A}) = K_n$.

Cette dernière définition du rang est liée à la décomposition de TUCKER3 [86] qui permet de généraliser l'écriture de la SVD matricielle aux tenseurs et de déterminer la meilleure approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur.

La SVD est un outil mathématique ayant fait ses preuves dans un large éventail d'applications [51, 88]. Sa généralisation aux tenseurs est cependant loin d'être triviale. En effet, il existe plusieurs décompositions tensorielles qui dépendent de la définition du rang d'un tenseur. Certaines d'entre-elles (décomposition de Tucker3 [85] et décomposition PARAFAC/CANDECOMP [25]) sont abouties, mais toutes font encore l'objet de recherches actives [33, 95].

Dans les deux sections suivantes, nous présentons tout d'abord la HOSVD (Higher Order Singular Value Decomposition) [17] et l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur [18], qui reposent sur le modèle de décomposition tensorielle de TUCKER3, ainsi que la décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP. Nous insistons tout particulièrement sur la décomposition tensorielle de TUCKER3. Nous présentons ensuite le processus numérique TUCKALS3 [34] basé sur un algorithme des moindres carrés alternés (ALS - Alternating Least Square) permettant d'obtenir l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur. Nous rappelons enfin comment ces outils mathématiques peuvent être interprétés comme une ACP effectuée simultanément sur chacun des n -modes du tenseur [34].

1.4 Décomposition de Tucker3

La décomposition de TUCKER3, présentée en 1964 par Tucker, a initialement été élaborée pour effectuer l'analyse en composantes principales des données tensorielles d'ordre trois [85]. Un algorithme ALS permettant de déterminer la décomposition de TUCKER3 a été proposé par Kroonenberg et De Leeuw en 1980 [35, 34, 83], et repris dans plusieurs études récentes [16, 6, 95].

1.4.1 Modèle de la décomposition de TUCKER3

Dans la décomposition tensorielle de TUCKER3, tout tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N peut s'exprimer par la relation :

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \dots \times_N U^{(N)}, \quad (1.34)$$

dans laquelle $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{K_1 \times \dots \times K_N}$ est appelé « tenseur noyau³ ». Il représente l'équivalent de la matrice pseudo-diagonale, appelée « matrice noyau », dans la SVD matricielle. D'autre part, $\forall n = 1, \dots, N$, $U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times K_n}$ est une matrice orthonormale :

$$U^{(n)T} U^{(n)} = I_{I_n \times I_n}. \quad (1.35)$$

³ « Core tensor ».

Les conditions sur la pseudo-diagonalité et sur l'ordonnancement des valeurs singulières dans le cas matriciel sont remplacées par les conditions de « toute orthogonalité » et « d'ordonnancement » des sous-tenseurs d'ordre $N - 1$ [17] :

1. Toute orthogonalité : $\forall n = 1, \dots, N, \forall \alpha$ et $\forall \beta \in \{1, \dots, I_n\}$, les sous tenseurs $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ et $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ d'ordre $N - 1$ sont orthogonaux : $\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha} | \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0$.
2. Ordonnancement : $\forall n = 1, \dots, N, \|\mathcal{S}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\| \geq \dots \|\mathcal{S}_{i_n=I_n}\|$.

Remarque 1 - Le modèle de décomposition tensorielle de TUCKER3 donné par la relation (1.34) représente l'extension du modèle de décomposition en valeurs singulières des matrices. En effet, la SVD d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$A = USV^T = S \times_1 U \times_2 V, \quad (1.36)$$

où $S \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ est la matrice noyau pseudo-diagonale, et $U \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1}$ et $V \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_2}$ sont les matrices unitaires contenant les vecteurs singuliers gauches et droites de la matrice A .

1.4.2 Détermination du modèle de décomposition de TUCKER3

Dans toute la suite, nous dénommerons par $\text{LRTA-}(K_1, \dots, K_N)^4$, l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur d'un tenseur.

Les paragraphes qui suivent proposent une synthèse des calculs aboutissant à la décomposition de TUCKER3, et présentés dans [35, 34] et [16, 17, 18]. Une partie de ces calculs est résumée dans [56].

Le rappel de ces calculs nous permettent de souligner dans quelle mesure la $\text{LRTA-}(K_1, \dots, K_N)$ constitue une ACP multimodale. Nous rappelons pourquoi la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD, utilisée dans certains traitement de signaux MM [39, 40, 58, 59], constitue une approximation de la $\text{LRTA-}(K_1, \dots, K_N)$.

1.4.2.1 Présentation du problème : $\text{LRTA-}(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur

Étant donné un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N , le problème d'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur de $\mathcal{A}$ consiste à trouver le tenseur $\mathcal{B}$ de rang- $(K_1, \dots, K_N)$, tel que $\forall n = 1, \dots, N, K_n < I_n$, et tel que la norme de Frobenius tensorielle :

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2 \quad (1.37)$$

soit minimale.

D'après la relation (1.34), la décomposition tensorielle de TUCKER3 de $\mathcal{B}$ s'exprime par :

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}, \quad (1.38)$$

où $U^{(n)}$ est une matrice orthonormale de dimensions $(I_n \times K_n)$, $\forall n = 1, \dots, N$, et $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{K_1 \times \dots \times K_N}$ est le tenseur noyau.

⁴Lower Rank- $(K_1, \dots, K_N)$ Tensor Approximation.

La solution des moindres carrés [35] implique que :

$$\mathcal{D} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \dots \times_N U^{(N)T}. \quad (1.39)$$

Par conséquent, en introduisant l'expression (1.39) dans (1.38), et en utilisant les propriétés (1.9) et (1.10) du n -mode produit, l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur optimale du tenseur $\mathcal{A}$ s'exprime par :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 P^{(1)} \dots \times_N P^{(N)}, \quad (1.40)$$

dans laquelle, $\forall n = 1, \dots, N$, $P^{(n)}$ est le projecteur orthonormal n -modal sur le sous-espace $E_1^{(n)}$ de l'espace vectoriel n -modal $E^{(n)}$. $E_1^{(n)}$ est de dimension K_n et est engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $U^{(n)}$. Le projecteur $P^{(n)}$ qui satisfait à la minimisation de l'expression (1.37) est donné par :

$$P^{(n)} = U^{(n)} U^{(n)T}. \quad (1.41)$$

Rechercher l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur revient donc à déterminer les matrices $U^{(n)}$ qui définissent les projecteurs $P^{(n)}$. Dans ce but, il est montré [35] que minimiser (1.37) par rapport à $\mathcal{B}$ est équivalent à maximiser par rapport aux matrices $U^{(1)}, \dots, U^{(N)}$ la fonction quadratique non linéaire :

$$g(U^{(1)}, \dots, U^{(N)}) = \|\mathcal{D}\|^2. \quad (1.42)$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation des moindres carrés qui peut être résolu à l'aide de l'algorithme des moindres carrés alternés (Alternating Least Square, ALS) [17, 31, 35, 95]. En effet, les matrices $U^{(n)}$ qui maximisent la relation (1.42) doivent être déterminées conjointement.

Le but de ces méthodes est de construire l'ensemble des suites matricielles $\{U_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $n = 1, \dots, N$, qui convergent vers les matrices optimales $U^{(n)}$. Chaque itération de l'algorithme ALS est composée de N étapes⁵ dans lesquelles les suites $\{U_k^{(n)}\}$ sont définies par récurrence à l'aide de la forme multilinéaire (1.42). Pour un n -mode donné, le terme $U_{k+1}^{(n)}$ est obtenu en maximisant par rapport à $V^{(n)}$ la fonction :

$$h_k^n(V^{(n)}) = g(U_{k+1}^{(1)}, \dots, U_{k+1}^{(n-1)}, V^{(n)}, U_k^{(n+1)}, \dots, U_k^{(N)}), \quad (1.43)$$

obtenue en remplaçant dans la relation (1.42), le terme $U^{(m)}$, $\forall m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$, par la suite $\{U_k^{(m)}\}$ considérée comme constante, et fixée à sa dernière valeur calculée au cours du processus ALS. La fonction $h_k^n(V^{(n)})$ est donc donnée par :

$$h_k^n(V^{(n)}) = \|\mathcal{H}^{(n),k}\|^2, \quad (1.44)$$

dans laquelle le tenseur $\mathcal{H}^{(n),k}$ est défini par :

$$\mathcal{H}^{(n),k} = \mathcal{A} \times_1 U_{k+1}^{(1)T} \dots \times_{n-1} U_{k+1}^{(n-1)T} \times_n V^{(n)T} \times_{n+1} U_k^{(n+1)T} \dots \times_N U_k^{(N)T}. \quad (1.45)$$

⁵Correspondant aux N modes du tenseur, i.e. l'ordre du tenseur.

1.4.2.2 Simplification de la fonction $h_k^n(V^{(n)})$

Grâce à la relation (1.14) définissant la norme tensorielle de Frobenius, il est possible de réécrire la forme linéaire $h_k^n(V^{(n)})$, donnée à la relation (1.44), en fonction de l'opérateur de trace matricielle par :

$$h_k^n(V^{(n)}) = \|\mathcal{H}^{(n),k}\|^2 = \|H_n^{(n),k}\|^2 = \text{trace} \left[H_n^{(n),k} H_n^{(n),k^T} \right], \quad (1.46)$$

dans laquelle, d'après les propriétés (1.26) du n -mode produit, et (1.23) sur la transposée d'un produit de Kronecker de plusieurs matrices, la matrice $H_n^{(n),k}$, dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{H}^{(n),k}$ s'exprime par :

$$H_n^{(n),k} = V^{(n)T} A_n \left(U_{k+1}^{(1)} \cdots \otimes U_{k+1}^{(n-1)} \otimes U_k^{(n+1)} \cdots \otimes U_k^{(N)} \right). \quad (1.47)$$

En utilisant les propriétés (1.23) et (1.22) sur le produit de Kronecker, le produit matriciel $H_n^{(n),k} H_n^{(n),k^T}$ peut être factorisé de telle sorte que la fonction $h_k^n(V^{(n)})$ s'exprime comme une forme quadratique linéaire par l'expression :

$$h_k^n(V^{(n)}) = \text{trace} \left[V^{(n)T} C_k^{(n)} V^{(n)} \right], \quad (1.48)$$

dans laquelle la matrice $C_k^{(n)}$ est définie par :

$$C_k^{(n)} = A_n \left(P_{k+1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes P_{k+1}^{(n-1)} \otimes P_k^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes P_k^{(N)} \right) A_n^T, \quad (1.49)$$

et le projecteur orthogonal $P_k^{(m)}$ par :

$$P_k^{(m)} = U_k^{(m)} U_k^{(m)T}. \quad (1.50)$$

1.4.2.3 Matrice $U_{k+1}^{(n)}$ maximisant la fonction $h_k^n(V^{(n)})$

Définissons la matrice $U_{k+1}^{(n)}$ comme l'argument qui maximise la fonction $h_k^n(V^{(n)})$ sur l'ensemble des matrices orthogonales :

$$U_{k+1}^{(n)} = \underset{\substack{V^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times K_n} \\ \text{orthonormale}}}{\arg \max} \quad \text{trace} \left[V^{(n)T} C_k^{(n)} V^{(n)} \right]. \quad (1.51)$$

La matrice $C_k^{(n)}$ de la relation (1.49) dépend uniquement de la dépliant A_n du tenseur initial $\mathcal{A}$ dans le n -mode, et des matrices $U_k^{(m)}$, $\forall m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$ supposées fixées. Ainsi, dans la fonction $h_k^n(V^{(n)})$ de la relation (1.48), la matrice $C_k^{(n)}$ est une constante. D'autre part, par construction, la matrice $C_k^{(n)}$ est symétrique réelle.

Par conséquent, un résultat bien connu sur l'optimisation des formes quadratiques linéaires [13] stipule que la matrice $U_{k+1}^{(n)}$ est constituée des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice $C_k^{(n)}$.

Notons enfin, que l'algorithme ALS permettant la maximisation de la fonction g de la relation (1.42), est arrêté lorsque $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2$ est inférieure à un seuil ϵ fixé *a priori*.

Intéressons-nous maintenant au cas particulier de la décomposition de TUCKER3 pour lequel $K_n = I_n, \forall n = 1, \dots, N$ et qui définit la HOSVD d'un tenseur.

1.4.3 HOSVD

Lorsque $K_n = I_n, \forall n = 1, \dots, N$, la décomposition de TUCKER3 définit la HOSVD. Il ne s'agit plus d'une approximation, mais d'une décomposition qui généralise la SVD matricielle. Dans ce cas précis, tous les calculs d'optimisation menés précédemment sont grandement simplifiés. En effet, les matrices recherchées $U^{(n)}, n = 1, \dots, N$, minimisant la fonction $g(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$ donnée à la relation (1.42) deviennent unitaires :

$$U^{(n)T} U^{(n)} = U^{(n)} U^{(n)T} = I_{I_n \times I_n}, \forall n = 1, \dots, N. \quad (1.52)$$

Par conséquent, les projecteurs $P_k^{(m)} = U_k^{(m)} U_k^{(m)T}, m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$, définis à la relation (1.50) se réduisent à la matrice identité :

$$P_k^{(m)} = I_{I_n \times I_n}, \forall m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}. \quad (1.53)$$

La matrice $C_k^{(n)}$ donnée à la relation (1.49) ne s'exprime donc plus qu'en fonction de la matrice A_n , dépliant du tenseur initial $\mathcal{A}$ dans le n -mode :

$$C_k^{(n)} = A_n A_n^T. \quad (1.54)$$

La matrice $C_k^{(n)}$ a ainsi perdu toute dépendance avec les m -modes, $\forall m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$. La matrice $U^{(n)}$ satisfaisant à la relation (1.51), et maximisant la fonction $g(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$ dans le n -mode, peut donc être déterminée indépendamment de toutes les autres matrices $U^{(m)}, m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$. La relation (1.51) implique que $\forall n = 1, \dots, N, U^{(n)}$ est la matrice des vecteurs propres de la matrice symétrique réelle $A_n A_n^T$. Quel que soit $n = 1, \dots, N$, la matrice $U^{(n)}$ est donc la matrice des vecteurs singuliers gauches de la matrice dépliant A_n . Dans la suite, nous pourrions appeler la matrice $U^{(n)}$ par le terme « matrice des vecteurs singuliers n -modaux » du tenseur $\mathcal{A}$. Cette matrice généralise les vecteurs singuliers gauches et droits d'une matrice⁶.

1.4.3.1 Algorithme de détermination de la HOSVD

Quel que soit le tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, l'algorithme permettant de déterminer la HOSVD du tenseur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire le tenseur noyau $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ et les matrices unitaires des vecteurs singuliers n -modaux $U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n}, n = 1, \dots, N$, donnant la décomposition de TUCKER3 du tenseur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \dots \times_N U^{(N)}, \quad (1.55)$$

peut être résumé par les étapes suivantes :

1. Pour $n = 1$ à N :

⁶Tenseur d'ordre deux.

- (a) Déplier le tenseur $\mathcal{A}$ en sa matrice dépliant A_n ;
- (b) Déterminer la matrice unitaire $U^{(n)}$ en calculant la SVD de $A_n = U^{(n)}SV^{(n)}$;
- 2. Calculer le tenseur noyau par : $\mathcal{S} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)T} \cdots \times_N U^{(N)T}$.

L'algorithme permettant de déterminer la HOSVD d'un tenseur ne nécessite donc pas de processus numérique ALS, contrairement à l'approximation LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$.

1.4.3.2 Comparaison entre HOSVD et SVD

Dans le cas d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$, les vecteurs singuliers gauches et droits peuvent être considérés comme les vecteurs singuliers 1-modaux et 2-modaux de la matrice :

$$A = USV^T = S \times_1 U \times_2 V. \quad (1.56)$$

Dans ce cas, la matrice A peut être considérée comme sa propre matrice dépliant dans le 1-mode :

$$A = A_1, \quad (1.57)$$

et la matrice A^T comme la matrice dépliant de A dans le 2-mode :

$$A^T = A_2. \quad (1.58)$$

Les matrices U et V des vecteurs singuliers 1-modaux et 2-modaux de la matrice A sont donc les vecteurs propres respectifs des matrices $A_1 A_1^T$ et $A_2 A_2^T$.

La HOSVD d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \cdots \times I_N}$ généralise donc strictement la SVD matricielle. En effet, les matrices $U^{(n)}$ des vecteurs singuliers n -modaux du tenseur $\mathcal{A}$ sont les vecteurs propres des matrices $A_n A_n^T$, $\forall n = 1, \dots, N$.

1.4.3.3 Troncature de la HOSVD et LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$

D'après le théorème d'Eckart-Young [20], la meilleure approximation⁷ de rang- K inférieur d'une matrice A est obtenue en effectuant la troncature de sa SVD, c'est-à-dire, en conservant uniquement les K vecteurs singuliers associés aux K plus grandes valeurs singulières de A . La généralisation de ce théorème aux tenseurs n'est plus vérifiée.

En effet, la troncature de la HOSVD d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \cdots \times I_N}$, de rang- $(K_1, \dots, K_N)$, est obtenue à partir de sa HOSVD

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \cdots \times_N U^{(N)}, \quad (1.59)$$

en conservant dans chaque n -mode les K_n vecteurs singuliers associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la matrice A_n , c'est-à-dire les K_n premiers vecteurs colonnes de la matrice $U^{(n)}$, $\forall n = 1, \dots, N$. Appelons $U_{K_n}^{(n)}$ cette matrice et $\mathcal{S}^{K_1 \cdots K_N} \in \mathbb{R}^{K_1 \times \cdots \times K_N}$ le tenseur issu de $\mathcal{S}$, dont l'élément d'indices $(i_1, \dots, i_N)$ est défini par :

$$(\mathcal{S}^{K_1 \cdots K_N})_{i_1, \dots, i_N} = s_{i_1, \dots, i_N}, \forall i_n \leq K_n, \text{ et } \forall n = 1, \dots, N, \quad (1.60)$$

dans lequel $\forall i_n = 1, \dots, I_N$, et $\forall n = 1, \dots, N$, $s_{i_1, \dots, i_N}$ est l'élément d'indice $(i_1, \dots, i_N)$ du tenseur noyau $\mathcal{S}$.

⁷Au sens des moindres carrés.

La troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD du tenseur $\mathcal{A}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{A}^{K_1 \dots K_N} = \mathcal{S}^{K_1 \dots K_N} \times_1 U_{K_1}^{(1)} \dots \times_N U_{K_N}^{(N)}, \quad (1.61)$$

et peut s'obtenir à partir du tenseur $\mathcal{A}$ par l'expression :

$$\mathcal{A}^{K_1 \dots K_N} = \mathcal{A} \times_1 P_{K_1}^{(1)} \dots \times_N P_{K_N}^{(N)}, \quad (1.62)$$

dans laquelle :

$$P_{K_n}^{(n)} = U_{K_n}^{(n)} U_{K_n}^{(n)T}, \forall n = 1, \dots, N, \quad (1.63)$$

sont les projecteurs sur les sous-espaces n -modaux engendrés par les K_n vecteurs singuliers gauches associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la matrice dépliant A_n . Les calculs amenant à la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ sont résumés dans [56]. Dans la suite, nous noterons la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD par HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$.

Rien ne garantit que les matrices $U_{K_n}^{(n)}, n = 1, \dots, N$, soient les matrices optimales qui maximisent conjointement la fonction $g(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$ de la relation (1.42). En effet, ces matrices ont été déterminées indépendamment les unes des autres. Ainsi, le tenseur $\mathcal{A}^{K_1 \dots K_N}$ n'est pas nécessairement le tenseur de rang- $(K_1 \dots K_N)$ qui minimise la norme quadratique $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2$ donnée à la relation (1.37), sur l'ensemble des tenseurs de rang- $(K_1 \dots K_N)$ [16, 17].

Cependant, comme l'évoquent les études [16, 17], l'écart qui existe entre le tenseur $\mathcal{A}^{K_1 \dots K_N}$ et la meilleure approximation LRTA- $(K_1 \dots K_N)$ de $\mathcal{A}$ est généralement faible. Le tenseur $\mathcal{A}^{K_1 \dots K_N}$ est donc généralement utilisé⁸ pour initialiser le processus numérique ALS nécessaire à l'obtention de la meilleure approximation LRTA- $(K_1 \dots K_N)$ de $\mathcal{A}$. Cet algorithme est explicité dans la sous-section suivante.

1.4.4 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$: algorithme TUCKALS3

L'algorithme permettant d'obtenir les matrices $U_k^{(n)}$ de l'approximation LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur est connu sous le nom de l'algorithme de TUCKALS3 [35]. Il peut être résumé par les étapes suivantes :

1. Entrée : tenseur $\mathcal{A}$ et rangs n -modaux $K_1, \dots, K_N$.
2. Étape d'initialisation :
 - (a) $k = 0$;
 - (b) $\forall n = 1$ à N , $P_0^{(n)} = U_0^{(n)} U_0^{(n)T}$, avec $U_0^{(n)}$ la matrice des K_n vecteurs singuliers associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la matrice A_n , dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{A}$;
 - (c) $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A} \times_1 P_0^{(1)} \dots \times_N P_0^{(N)}$.
3. Boucle ALS :

Tant que $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}_k\|^2 > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fixé *a priori*,

 - (a) Pour $n = 1$ à N :
 - i. $\mathcal{B}^{(n),k} = \mathcal{A} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \dots \times_{n-1} P_{k+1}^{(n-1)} \times_{n+1} P_k^{(n+1)} \times_N P_k^{(N)}$;

⁸Notamment dans [35], même si ce tenseur d'initialisation n'est pas nommé par « troncature de la HOSVD » et dans [18].

- ii. Déplier suivant le n -mode, le tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$ en $B_n^{(n),k} = A_n(P_{k+1}^{(1)} \otimes \dots \otimes P_{k+1}^{(n-1)} \otimes P_k^{(n+1)} \dots \otimes P_k^{(N)})$;
- iii. Calculer $C_k^{(n)} = B_n^{(n),k} A_n^T$ donnée par la relation (1.49) ;
- iv. Effectuer la décomposition en valeurs propres de $C_k^{(n)}$, et placer les K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres dans la matrice orthogonale $U_{k+1}^{(n)}$;
- v. Calculer $P_{k+1}^{(n)} = U_{k+1}^{(n)} U_{k+1}^{(n)T}$;
- (b) Calculer $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{A} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \dots \times_N P_{k+1}^{(N)}$;
- (c) $k \leftarrow k + 1$.
- 4. Sortie : $\mathcal{B}_{k_{\text{stop}}} = \mathcal{A} \times_1 P_{k_{\text{stop}}}^{(1)} \dots \times_N P_{k_{\text{stop}}}^{(N)}$, meilleure approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur de $\mathcal{A}$, dans laquelle k_{stop} est l'indice de la dernière itération après convergence de l'algorithme TUCKALS3.

Remarque 1 - Dans le cas particulier où $K_n < I_n$, une extension de la méthode de la puissance (« Power Method » [23]) a été développée afin de ne calculer que les K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice $C_k^{(n)}$ permettant ainsi d'éviter le calcul de tous les éléments propres de $C_k^{(n)}$ correspondant à l'étape 2(a)iv de l'algorithme TUCKALS3. Cet algorithme est appelé méthode de la puissance d'ordre supérieur HOPM (« Higher Order Power Method ») [18].

1.4.5 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, n -mode produit et filtrage n -modal

D'après la relation (1.40), l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ est donnée par :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 P^{(1)} \dots \times_N P^{(N)}, \quad (1.64)$$

dans lequel, $\forall n = 1, \dots, N$, $P^{(n)}$ est le projecteur orthonormal sur un sous-espace n -modal $E_1^{(n)}$ de $E^{(n)}$, de dimension K_n .

Il est possible de donner une interprétation en terme de filtrage à ce résultat. En effet, le n -mode produit $\mathcal{A} \times_n P^{(n)}$ représente les produits matriciels consécutifs entre la matrice $P^{(n)}$ et les vecteurs n -modaux du tenseur appartenant à l'espace n -modal E_n et qui constituent les vecteurs colonnes de la matrice dépliant A_n . Par conséquent, en considérant le tenseur $\mathcal{A}$ comme un tenseur de données MM, le n -mode produit peut être interprété comme une opération de filtrage linéaire des données MM dans le n -mode, par le filtre-projecteur $P^{(n)}$. En effet, si le tenseur $\mathcal{B}$ est obtenu par application des projecteurs sur les sous-espaces signaux n -modaux, alors les bruits additifs et non corrélés avec le signal dans chaque n -mode sont éliminés. Nous le désignons par la suite par « filtrage n -modal ».

L'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur de $\mathcal{A}$ peut donc être interprétée comme une opération de filtrage linéaire « multimodal » par les n -modes filtres n -modaux $P^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$.

1.4.6 LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ et ACP multimodale

L'interprétation en terme de filtrage du n -mode produit a des conséquences quant à l'interprétation de la matrice $C_k^{(n)}$ définie par la relation (1.49) et calculée à l'étape 2(a)iii de l'algorithme TUCKALS3. Quelle que soit l'itération k du processus ALS, la matrice $C_k^{(n)}$ peut être réécrite suivant l'expression :

$$C_k^{(n)} = B_n^{(n),k} A_n^T, \quad (1.65)$$

dans laquelle :

$$B_n^{(n),k} = A_n(P_{k+1}^{(1)} \otimes \dots \otimes P_{k+1}^{(n-1)} \otimes P_k^{(n+1)} \dots \otimes P_k^{(N)}) \quad (1.66)$$

est la matrice dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$ défini par :

$$\mathcal{B}^{(n),k} = \mathcal{A} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \dots \times_{n-1} P_{k+1}^{(n-1)T} \times_{n+1} P_k^{(n+1)} \dots \times_N P_k^{(N)}. \quad (1.67)$$

En considérant de nouveau le tenseur $\mathcal{A}$ comme un tenseur de données, d'après l'expression (1.67), le tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$ s'obtient en filtrant le tenseur $\mathcal{A}$ par les filtres-projecteurs m -modaux $P_k^{(m)}$ sur tous les m -modes, excepté le n -mode.

Définissons par $\mathbf{b}_j$, $j = 1, \dots, M_n$, avec $M_n = I_1 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N$, les vecteurs n -modaux⁹ du tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$. Définissons de même par $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, M_n$, les vecteurs n -modaux¹⁰ du tenseur $\mathcal{A}$. D'après la relation (1.65) et les définitions précédentes, la matrice $C_k^{(n)}$ peut s'écrire sous la forme :

$$C_k^{(n)} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{M_n}] [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M_n}]^T = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbf{b}_j \mathbf{a}_j^T. \quad (1.68)$$

Par conséquent, au terme multiplicatif $\frac{1}{M_n}$ près, la matrice $C_k^{(n)}$ est une estimation de la matrice de covariance entre les vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{A}$ et les vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{B}_k^{(n)}$.

Considérons la matrice $U_{k+1}^{(n)}$ calculée à l'étape 2(a)iv de l'algorithme TUCKALS3, et à partir de laquelle est construit le projecteur $P_{k+1}^{(n)}$ de l'étape 2(a)v. Elle contient les K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice $C_k^{(n)}$. La matrice $U_{k+1}^{(n)}$ est donc la matrice des composantes principales « mutuelles » des vecteurs n -modaux des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{A}$. Ces composantes principales dépendent des composantes principales mutuelles des vecteurs m -modaux calculés dans tous les autres n -modes.

Ainsi, de la même façon que la SVD et l'approximation de rang- K [23] d'une matrice réalisent une ACP effectuée simultanément sur les vecteurs colonnes et les vecteurs lignes de la matrice, la décomposition tensorielle de TUCKER3 et la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ du tenseur $\mathcal{A}$ réalisent une ACP effectuée de façon simultanée sur tous les n -modes, et dont toutes les composantes principales n -modales sont interdépendantes [34]. Cette ACP généralisée tient compte de l'information conjointe de chacun des n -modes.

⁹i.e., les vecteurs colonnes de la matrice dépliant $B_n^{(n),k}$.

¹⁰i.e., les vecteurs colonnes de la matrice dépliant A_n .

L'interprétation de la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ en tant qu'ACP multimodale est utilisée dans le chapitre 3 pour réaliser la compression avec perte de signaux MM et dans le chapitre 4 pour résoudre le problème d'estimation d'un signal MM par filtrage multimodal d'un signal MM bruité.

1.5 Décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP

Nous avons vu dans la section précédente que la décomposition de TUCKER3 généralise aux tenseurs la modélisation matricielle¹¹ de la SVD. La représentation sous la forme canonique¹² est par construction équivalente à la modélisation matricielle de la SVD. Ceci n'est plus vrai dans le cas tensoriel. Nous présentons dans cette section les principaux résultats de la décomposition canonique d'un tenseur.

1.5.1 Définition de la décomposition PARAFAC/CANDECOMP, et approximation de rang R d'un tenseur

La décomposition canonique d'un tenseur d'ordre trois a été développée simultanément sous les noms d'analyse en facteurs parallèles (PARAFAC, « Parallel Factor analysis ») [25] et décomposition canonique (CANDECOMP, « Canonical Decomposition ») [8] selon les principes de l'analyse factorielle [9].

La décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP est basée sur la définition du rang d'un tenseur [36, 37] explicité dans l'expression (1.29). Dans cette décomposition, tout tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ de rang- R peut se décomposer en une somme de R tenseurs de rang un :

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^R \mathbf{u}_k^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_k^{(N)} = \sum_{k=1}^R \mathcal{A}_k, \quad (1.69)$$

dans laquelle $\forall k = 1, \dots, R$, $\mathcal{A}_k$ est un tenseur de rang un, et $\forall n = 1, \dots, N$, $\mathbf{u}_k^{(n)}$ est le vecteur d'une base de l'espace n -modal E_n associé au tenseur $\mathcal{A}$.

L'approximation de rang- K du tenseur $\mathcal{A}$, $K \leq R$, appelée aussi décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP à K composantes [6, 15, 16], est donnée par :

$$\mathcal{A}^K = \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_k^{(N)} = \sum_{k=1}^K \mathcal{A}_k, \quad (1.70)$$

et minimise l'erreur quadratique $e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$ donnée par la norme quadratique de Frobenius :

$$e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)}) = \|\mathcal{A} - \mathcal{A}^K\|^2, \quad (1.71)$$

dans laquelle, $\forall n = 1, \dots, N$, les vecteurs $\mathbf{u}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{u}_K^{(n)}$ définissent les vecteurs colonnes de la matrice :

$$U^{(n)} = [\mathbf{u}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{u}_K^{(n)}]. \quad (1.72)$$

¹¹ $A = USV^T$.

¹² $A = \sum_{i=1}^K \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, K étant le rang de la matrice A .

La décomposition PARAFAC/CANDECOMP à K composantes est unique [25, 8, 79], et comme il l'a été mentionné dans la section 1.3.1.2, elle ne prend en compte, *a priori*, d'aucune contrainte d'orthogonalité mutuelle entre les tenseurs de rang un. Des études introduisant des contraintes sur le modèle, telles que la non-négativité des données, ou l'orthogonalité, ont néanmoins été proposées [6].

La détermination de cette décomposition nécessite un processus numérique ALS [7, 37, 71, 72, 73, 25, 8, 6, 16] présenté dans la section suivante.

1.5.2 Algorithme PARAFAC ALS

Considérons le tenseur $\mathcal{A}$ d'ordre N . La matrice A_n^K dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{A}^K$, décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP à K composantes du tenseur $\mathcal{A}$ donnée à la relation (1.70), peut s'exprimer à l'aide du produit de Khatri-Rao (1.20), et des matrices $U^{(n)}$ (1.72) selon [6] :

$$A_n^K = U^{(n)}(U^{(n-1)} | \otimes \dots | \otimes U^{(1)} | \otimes U^{(N)} \dots | \otimes U^{(n+1)})^T. \quad (1.73)$$

$\forall n = 1, \dots, N$, les matrices $U^{(n)}$ minimisent l'erreur quadratique $e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$, donnée à la relation (1.71), dont l'expression en fonction des matrices A_n et A_n^K dépliantes des tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^K$ dans le n -mode est donnée par :

$$e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)}) = \|A_n - U^{(n)}(U^{(n-1)} | \otimes \dots | \otimes U^{(1)} | \otimes U^{(N)} \dots | \otimes U^{(n+1)})^T\|^2. \quad (1.74)$$

La détermination des matrices $U^{(n)}$ minimisant l'erreur quadratique $e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)})$ nécessite un processus numérique basé sur les moindres carrés alternés (ALS) [7, 37, 71, 72, 73, 25, 8, 6, 16], appelé "algorithme PARAFAC ALS" [6]. Il se résume par les étapes suivantes :

1. Entrée : tenseur $\mathcal{A}$
2. (a) $\forall n = 1, \dots, N$, initialiser les matrices $U^{(n)}$ par des matrices aléatoires [25].
 (b) Pour $n = 1$ à N calculer :
 - i. $Z^{(n)} = U^{(n-1)} | \otimes \dots | \otimes U^{(1)} | \otimes U^{(N)} \dots | \otimes U^{(n+1)}$
 - ii. $U^{(n)} = A_n Z (Z^T Z)^\sharp$, où $(Z^T Z)^\sharp$ est l'inverse de Moore-Penrose [23] de la matrice $(Z^T Z)$,
 - iii. Répéter l'étape (b) tant que $e(U^{(1)}, \dots, U^{(N)}) > \varepsilon$, ε étant un seuil positif fixé *a priori*.
3. Sortie : $\mathcal{A}^K$, approximation de rang- R du tenseur $\mathcal{A}$, tel que $A_n^K = U^{(n)}(U^{(n-1)} | \otimes \dots | \otimes U^{(1)} | \otimes U^{(N)} \dots | \otimes U^{(n+1)})^T$.

1.5.3 État de l'art sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale et l'approximation de rang un d'un tenseur

La décomposition PARAFAC/CANDECOMP d'un tenseur $\mathcal{A}$ vise à déterminer le nombre minimum de tenseurs de rang un qui, par sommation, donnent $\mathcal{A}$. Par conséquent, plusieurs études récentes se sont concentrées sur la détermination de la meilleure approximation de rang un d'un tenseur [33, 31, 95] qui peut être considérée comme une approximation LRTA- $(1, \dots, 1)$.

D'après [95], le comportement de la convergence de la décomposition de TUCKER3, ainsi que son implémentation ALS, n'a pas été suffisamment analysée. Dans cette étude, une analyse rigoureuse de cet algorithme ALS est proposée, ainsi qu'un nouvel algorithme basé sur la généralisation du Quotient de Rayleigh (utilisé classiquement dans le calcul de la SVD [23]) appelé Quotient de Rayleigh Généralisé (GQR, « Generalized Rayleigh Quotient »). De nouvelles méthodes itératives d'optimisation basées sur les algorithmes de Gauss-Newton et de Jacobi [23], pour résoudre les problèmes de non-linéarité rencontrés dans l'approximation de rang un des tenseurs d'ordre supérieur, sont aussi présentées.

Des conditions d'orthogonalité mutuelle entre les tenseurs de rang un ont récemment été ajoutées au modèle de décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP [33]. Plusieurs définitions d'orthogonalité entre tenseurs de rang un ont été proposées :

1. Deux tenseurs de rang un $\mathcal{U} = \mathbf{u}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}^{(N)}$ et $\mathcal{V} = \mathbf{v}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{v}^{(N)}$ sont orthogonaux si :

$$\langle \mathcal{U} | \mathcal{V} \rangle = \prod_{j=1}^N \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{v}^{(j)} = 0. \quad (1.75)$$

2. $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont complètement orthogonaux ($\mathcal{U} \perp_c \mathcal{V}$) si :

$$\mathbf{u}^{(j)} \perp \mathbf{v}^{(j)}, \forall j = 1, \dots, N. \quad (1.76)$$

3. Enfin, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont fortement orthogonaux ($\mathcal{U} \perp_s \mathcal{V}$) si :

$$\mathbf{u}^{(j)} = \pm \mathbf{v}^{(j)} \text{ ou } \mathbf{u}^{(j)} \perp \mathbf{v}^{(j)}, \forall j = 1, \dots, N. \quad (1.77)$$

Il est montré dans cette étude que plusieurs décompositions tensorielles PARAFAC/CANDECOMP orthogonales peuvent être élaborées en fonction des définitions de l'orthogonalité des tenseurs de rang un (orthogonalité simple, forte ou complète). Il est enfin montré que l'extension aux tenseurs du théorème d'Eckart-Young [20] concernant l'approximation de rang inférieur des matrices reste encore un problème ouvert.

La conclusion de cette brève étude bibliographique est qu'il n'existe pour l'instant aucun algorithme optimal permettant l'obtention d'une décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP orthogonale. La détermination de tels algorithmes reste un problème mathématique non résolu. Cependant des décompositions PARAFAC/CANDECOMP non nécessairement orthogonales ont largement été utilisées dans plusieurs domaines d'application présentés dans la section suivante.

1.5.4 Quelques domaines d'application

La décomposition PARAFAC/CANDECOMP, qui effectue une ACP multimodale des données MM, trouve des applications dans des domaines très variés. Nous pouvons citer de manière non exhaustive les domaines suivant :

1. L'ACP multimodale obtenue par décomposition PARAFAC/CANDECOMP a récemment été employée dans la recherche agro-alimentaire [6]. Les principales applications concernent la détection par analyse spectrale de composés chimiques dans certains aliments, dont quelques procédés d'analyse peuvent être décrits à l'aide de décompositions tensorielles. Nous pouvons citer, par exemple, la détection des moisissures dans le pain, la détection de certains composés chimiques dans le sucre par analyse spectrale, ou l'analyse de l'activité enzymatique responsable de la couleur des fruits et légumes.

2. La décomposition PARAFAC/CANDECOMP étend et unifie quelques outils issus du traitement d'antenne et trouve des applications pour l'estimation des harmoniques multidimensionnelles, pour l'estimation des angles d'incidences (élévation et azimuth) d'une onde porteuse, la détection aveugle multi-utilisateur en télécommunication, et pour la formation de voies, en aveugle, pour des chemins multiples incohérents [78, 79, 80, 81, 44, 63, 46, 29].
3. Elle est utilisée pour la compression avec perte d'information et la reconstruction de séquences vidéo [47].
4. En traitement d'images, d'autres études ont ajouté au modèle de décomposition PARAFAC/CANDECOMP une contrainte de positivité sur les données, pour la reconstruction et l'extraction de composantes caractéristiques d'images en couleur [92].

1.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, après avoir rappelé quelques définitions et propriétés des principaux opérateurs tensoriels, nous avons défini les différents rangs d'un tenseur :

1. Le rang n -modal K_n et le rang- $(K_1, \dots, K_N)$ qui lui est associé. Ce rang permet de définir l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieurs d'un tenseur (LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$).
2. Le rang d'un tenseur, qui généralise le rang matriciel, et sur lequel repose la décomposition canonique d'un tenseur appelé couramment décomposition PARAFAC/CANDECOMP.

Nous avons ensuite présenté les différentes décompositions tensorielles sur lesquelles sont basés nos traitements :

1. La décomposition tensorielle de TUCKER3 représente, sous la condition que $K_n < I_n$, $\forall n = 1, \dots, N$, l'approximation LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur. Sa détermination nécessite un processus numérique basé sur les moindres carrés alternés appelé algorithme TUCKALS3 [35, 83, 16, 6]. Elle représente une ACP effectuée simultanément sur tous les n -modes et est appelée dans la suite par ACP multimodale.
2. La HOSVD généralise aux tenseurs la SVD matricielle. Elle représente une décomposition de TUCKER3 dans le cas particulier où $K_n = I_n$, $\forall n = 1, \dots, N$. La troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD, que nous notons par HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$, représente classiquement l'étape d'initialisation de l'algorithme TUCKALS3, et à ce titre nous pouvons la considérer comme une forme approximée de la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur $\mathcal{A}$. Elle est déterminée en calculant l'approximation matricielle de rang- K_n inférieure effectuée sur chaque matrice dépliant A_n .
3. La décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP effectue la décomposition canonique d'un tenseur en une somme de tenseurs de rang un. Cette décomposition représente aussi une ACP multimodale et nécessite un processus numérique pour être déterminé [25, 8, 6, 16]. Cependant, le principal inconvénient de cette méthode est que, contrairement au cas matriciel, il n'existe pour l'instant aucun algorithme permettant la détermination d'une décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale [33].

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à l'influence du contenu d'une image en couleur ou d'une séquence d'images en niveaux de gris sur le choix des rangs n -modaux utilisés dans les décompositions tensorielles.

CHAPITRE

2

Influence des rangs
 n -modaux dans
l'approximation d'images
en couleur et de séquences
d'images en niveaux de
gris

L'estimation de la dimension d'un sous-espace signal constitue un enjeu fondamental dans un grand nombre de problèmes de traitement des signaux monodimensionnels et bidimensionnels [1]. La détermination de ce sous-espace repose généralement sur la décomposition en valeurs singulières (SVD) [23]. D'autre part, la SVD et la Transformation de Karhunen-Loeve (TKL) ont très largement été employées en traitement du signal [87, 88], en particulier en sismique et traitement d'images.

En sismique, l'estimation de la dimension d'un sous-espace signal a rendu possible certaines méthodes de séparation d'ondes basées sur l'utilisation de la SVD et de la TKL [21, 22, 26, 27, 28, 45, 48].

En traitement d'images, certaines méthodes de codage et de compression d'images reposent aussi sur la détermination d'un sous-espace signal, bien qu'elles n'aient pas été spécifiquement explicitées en ces termes. En effet, toute image en niveaux de gris peut se décomposer en une somme de matrices de rang un, appelées « images propres » associées à l'image initiale [2, 3]. L'ensemble des images propres forme une base orthogonale qui permet de reconstruire l'image initiale. Bien qu'un grand nombre d'images propres soit nécessaire pour effectuer une reconstruction précise, un petit nombre de ces images propres est généralement suffisant pour représenter l'image initiale avec une faible erreur de reconstruction. Plusieurs méthodes de codage d'images proposent, alors, de compresser les vecteurs propres et les valeurs propres issus de la TKL [3, 30, 53, 77, 75]. Ainsi, pour une erreur de reconstruction donnée, plus le nombre d'éléments propres est faible, meilleure sera la compression. L'étape préliminaire à ces méthodes de compression peut donc être interprétée comme la détermination d'un sous-espace « signal » optimal (associé à une erreur de reconstruction donnée) caractérisant l'image à compresser.

Le concept de sous-espace signal a récemment été adapté aux données MM pour résoudre certains problèmes de séparation d'ondes sismiques polarisées [39, 40]. Ce modèle implique implicitement que chaque n -mode du tenseur modélisant les données MM est associé à un sous-espace signal n -modal. Une estimation des dimensions des sous-espaces signaux n -modaux, basée sur l'étude de l'évolution des valeurs singulières de chaque dépliante dans un n -mode, a été évoqué dans [39]. Cependant, le choix des dimensions des sous-espaces signaux n -modaux reste un problème difficile qui n'a pas été suffisamment traité dans la littérature, notamment en traitement d'images.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'influence du contenu des images en couleur et des séquences d'images en niveaux de gris sur la valeur des rangs n -modaux obtenus lors de la reconstruction des tenseurs de données. Notre étude est donc basée sur la décomposition tensorielle de TUCKER3 présentée au chapitre 1.

Nous présentons, tout d'abord, dans la section 2.1, la modélisation tensorielle de quelques signaux MM. Nous présentons, entre autres, les images en couleur, et les séquences d'images en niveaux de gris qui sont modélisées par des tenseurs d'ordre trois.

Dans la section 2.2, nous présentons le problème de notre étude. Celui-ci consiste à déterminer l'influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle de données MM. Nous rappelons dans un premier temps les principaux principes de l'approximation matricielle d'une image en niveaux de gris ainsi que le concept de reconstruction avec perte d'information inhérente à cette approximation. Nous étendons ce concept au cas des données MM grâce à la LRTA- (K_1, K_2, K_3) et la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) . Nous présentons aussi le critère de l'Erreur de Reconstruction Relative (ERR) qui généralise l'erreur de reconstruction classiquement uti-

lisée en traitement d'images [24]. Toute notre étude repose sur ce critère qui nous permet de mesurer l'écart entre le tenseur initial et le tenseur approximé.

Dans la section 2.3, nous étudions l'influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle d'images en couleur. Pour cela, nous dégagons, tout d'abord, une série de propriétés concernant la valeur des rangs n -modaux K_n utilisés dans la LRTA- (K_1, K_2, K_3) et la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) . Ceci est effectué grâce à l'étude des surfaces donnant l'évolution de l'ERR(K_1, K_2, K_3) en fonction des paramètres K_1 et K_2 , à K_3 fixé. Nous montrons, d'autre part, que les résultats donnés par la LRTA- (K_1, K_2, K_3) et la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) sont sensiblement identiques. Nous établissons enfin, dans quelle mesure l'information contenue dans une image en couleur, influence la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné.

Dans la section 2.4, nous étendons l'étude effectuée pour les images en couleur, au cas des séquences d'images en niveaux de gris, pour lesquelles le nombre de composantes 3-modales est supérieur à trois, et pour lesquelles le contenu de chaque « tranche » bidimensionnelle associée aux composantes 3-modales n'est plus identique.

2.1 Modélisation tensorielle des signaux MM

Une modélisation tensorielle peut être adoptée dans un grand nombre de problèmes se rattachant à des domaines aussi variés que la sociologie, l'analyse de données ou le traitement du signal [34, 14, 15].

En traitement du signal, les données MM, telles que les images en couleur, les images multispectrales, les séquences d'images en niveaux de gris ou en couleur, ou les ondes sismiques polarisées, peuvent être modélisées par des tenseurs d'ordre supérieur. Chaque n -mode du tenseur d'ordre N est associé à un indice $i_n, \forall n = 1, \dots, N$, et représente une grandeur physique telle que l'espace (longueur, largeur, hauteur), le temps, le canal de couleur (longueur d'onde).

D'après la section 1.1, chaque n -mode du tenseur est associé à un espace vectoriel n -modal $E^{(n)}$ de dimension I_n qui représente le nombre d'échantillons effectués suivant la grandeur physique associée au n -mode (espace, temps, etc...).

Présentons quelques signaux MM que nous serons amenés à traiter dans cette étude, ainsi que leur modélisation tensorielle.

2.1.1 Images en niveaux de gris

Dans le domaine du traitement d'images, l'enregistrement numérique d'une scène a été rendu possible par l'échantillonnage spatial bidimensionnel effectué, par exemple, par une matrice de capteurs CCD, chacun de ces capteurs étant composé de semi-conducteurs sensibles à l'intensité de la lumière. Cette matrice de capteurs CCD effectuée à un instant donné, l'échantillonnage spatial en terme d'intensité lumineuse, de toutes les ondes électromagnétiques arrivant sur le plan de la matrice. Cet enregistrement aboutit aux données numériques bidimensionnelles constituant une image numérique en niveaux de gris. Cette image est classiquement représentée par une matrice de données, comprises généralement entre 0 et 255¹,

¹Lorsque l'échantillonnage est effectué sur 8 bits.

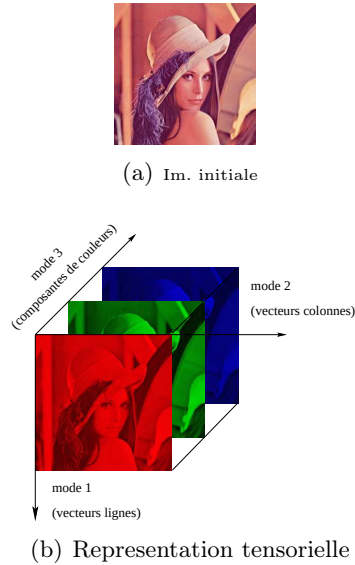


Figure 2.1 — (b) : Modélisation de l'image standard "Lena" en couleur (a), par un tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$. $I_1 = 256$: nombre de lignes. $I_2 = 256$: nombre de colonnes. $I_3 = 3$: nombre de canaux de couleur.

représentant les niveaux de gris [19, 2, 3], c'est-à-dire un tenseur d'ordre 2 dans lequel un n -mode est associé aux lignes et un n -mode aux colonnes.

2.1.2 Images multicomposantes

L'utilisation conjointe de capteurs composés de semi-conducteurs sensibles à plusieurs bandes spectrales permet d'affiner la mesure énergétique d'une onde électromagnétique en prenant en compte la longueur d'onde. Ces enregistrements aboutissent aux données numériques MM telles que :

1. les images en couleur, pour lesquelles l'échantillonnage spatial bidimensionnel s'effectue simultanément (en terme d'intensité lumineuse) suivant les longueurs d'onde associées au rouge, au vert et au bleu,
2. ou telles que les images multispectrales et hyperspectrales, pour lesquelles une multitude de bandes spectrales est prise en compte sur l'ensemble du spectre électromagnétique.

Comme le montre la Figure 2.1, une image en couleur peut être considérée comme l'association de trois images bidimensionnelles en niveaux de gris correspondant aux trois couleurs fondamentales rouge, vert et bleu (RVB). La Figure 2.1(b) illustre comment une image couleur peut être modélisée par un tenseur d'ordre trois dans lequel deux n -modes sont associés au repérage spatial d'un pixel (lignes et colonnes), et un troisième au canal de couleur (RVB). Notons que d'autres bases peuvent être utilisées pour décrire l'espace des couleurs. Les trois composantes de teinte, luminance et chrominance (HSV) constituent une de ces bases.

De même, une image multispectrale (obtenue par exemple à l'aide de capteurs embarqués sur certains satellites) peut être considérée comme l'extension des images couleur [10]. Elle représente l'association d'une multitude d'images bidimensionnelles correspondant à différents

canaux spectraux. Ces images peuvent être modélisées par un tenseur d'ordre trois dans lequel deux n -modes sont associés aux lignes et colonnes, et un troisième au canal spectral.

2.1.3 Séquence d'images

Pour étudier l'évolution d'une scène, la dimension temporelle doit être prise en compte. Ainsi, l'échantillonnage temporel de l'onde lumineuse, effectué sur chacun des capteurs scalaires (pour les images en niveaux de gris) ou vectoriels (pour les images en couleur), aboutissent à des données numériques MM telles que les séquences d'images en niveaux de gris, ou les séquences d'images en couleur. Chaque image correspondant à un échantillon temporel, est appelée « trame ».

Les séquences d'images en niveaux de gris peuvent donc être modélisées par un tenseur d'ordre trois [32], dans lequel deux n -modes sont associés au repérage spatial d'un pixel (lignes et colonnes), et un n -mode correspond à l'évolution temporelle du niveau de gris de ce pixel dans le temps (cf. Figure 2.2).

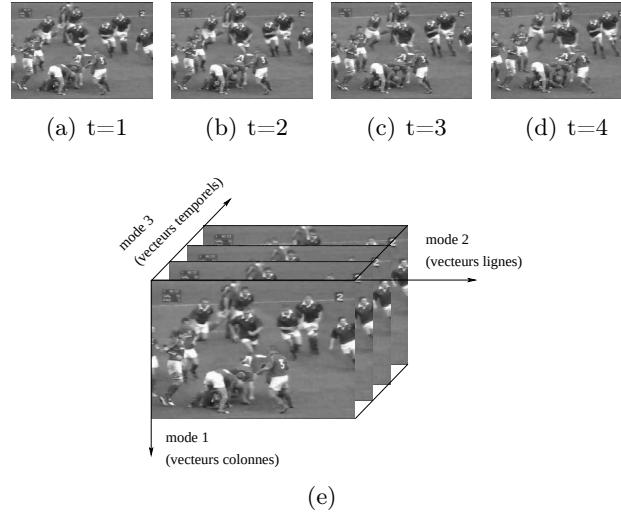


Figure 2.2 — (a)-(d) : 4 trames consécutives d'une séquence d'images en niveaux de gris. (e) : Modélisation de cette séquence par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. I_1 : nombre de lignes. I_2 : nombre de colonnes. I_3 : nombre de trames obtenues par échantillonnage temporel. Un « vecteur temporel » représente l'évolution temporelle du niveau de gris d'un pixel repéré par (i_1, i_2) .

De même, une séquence d'images en couleur peut être modélisées par un tenseur d'ordre quatre dans lequel trois n -modes modélisent une image en couleur, et un quatrième n -mode correspond à l'évolution temporelle du niveau de gris de chaque pixel dans un canal de couleur. Les Figures 2.3(e)-2.3(g) constituent une représentation de la modélisation tensorielle d'ordre quatre de la séquence d'images en couleur.

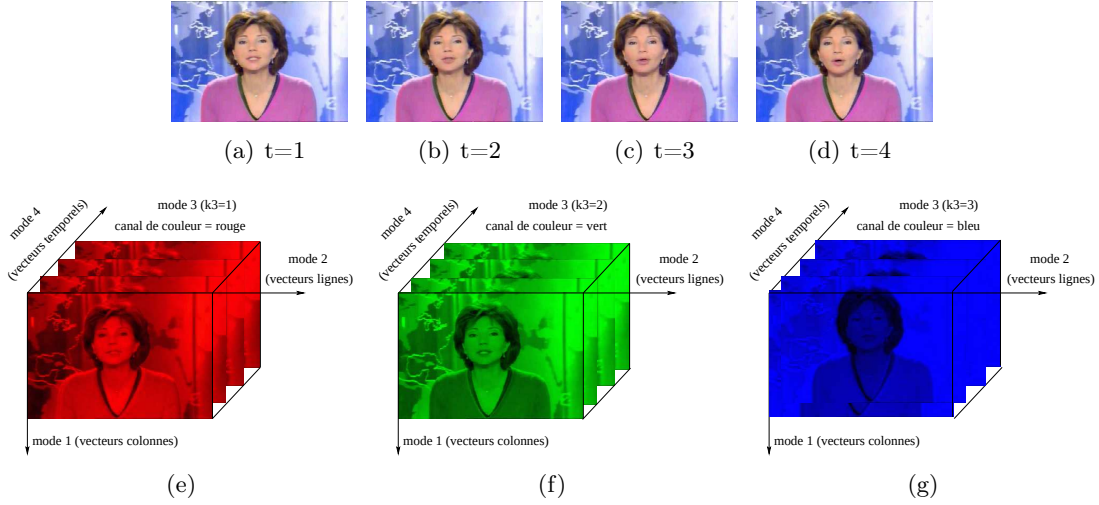


Figure 2.3 — (a)-(d) : 4 trames consécutives d'une séquence d'images en couleur. (e) : Modélisation tensorielle de cette séquence par un tenseur d'ordre 4 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}$. I_1 : nombre de lignes. I_2 : nombre de colonnes. I_3 : nombre de canaux spectraux. I_4 : nombre de trames temporelles. Un « vecteur temporel » représente l'évolution temporel du niveau de gris d'un pixel repéré par (i_1, i_2) .

2.1.4 Ondes sismiques polarisées

La physique des ondes élastiques associée au traitement du signal ont permis aux géophysiciens de relier la réponse des capteurs sismiques aux structures de la croûte terrestre, permettant ainsi d'affiner par exemple, la caractérisation des réservoirs pétroliers naturels, et d'optimiser l'exploitation des gisements qu'ils renferment. L'amélioration de ces techniques a notamment été rendue possible par la prise en compte de la nature orientée dans les trois directions de l'espace d'une onde sismique. L'association de plusieurs capteurs directionnels, appelés géophones [38, 76] a permis ainsi de mesurer la polarisation d'une onde. Les géophones sont aussi appelés « capteurs vectoriels » du fait de la nature directionnelle de la quantité qu'ils mesurent. L'utilisation de ces capteurs, associée à un échantillonnage temporel des ondes sismiques, a donc engendré un nouveau type de données numériques MM.

En effet, considérons une onde sismique polarisée reçue sur une antenne de I_1 capteurs multicomposantes, et dont l'échantillonnage temporel est effectué sur I_2 échantillons. Chaque capteur sismique est composé de trois géophones. Lorsque ces capteurs sont utilisés en triplet formant un trièdre direct (voir les capteurs $C_1, \dots, C_{10}$ de la Figure 2.4), ils permettent un enregistrement du mouvement du sous-sol dans les trois directions de l'espace [76].

La Figure 2.4 présente une onde sismique polarisée plane, dont le vecteur d'onde² forme un angle α avec le plan de l'antenne. Le nombre de capteurs est par exemple $I_1 = 10$, et le nombre d'échantillons temporels est $I_2 = 200$. Les tranches sismiques bidimensionnelles correspondant aux trois composantes de polarisation suivant les axes x , y et z sont représentées respectivement sur les Figures 2.5(a)-2.5(c), et correspondent à une ondelette présentant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ radians entre chaque composante. Ce signal sismique peut être modélisé par

²C'est-à-dire la direction de propagation de l'onde plane.

un tenseur d'ordre trois $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$ (cf. Figure 2.5(d)).

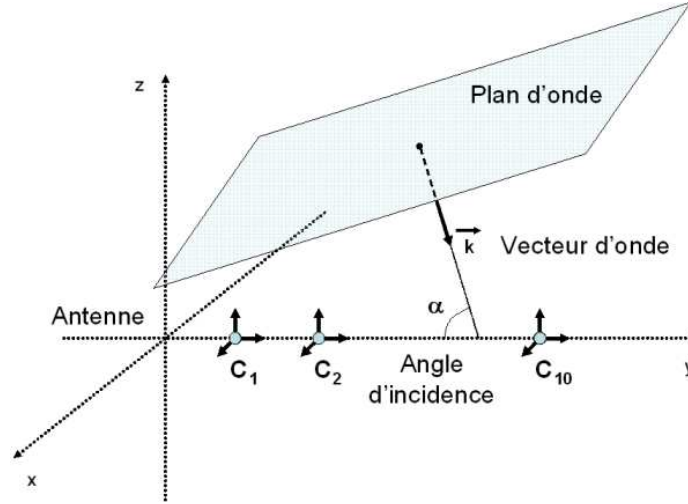


Figure 2.4 — Onde sismique plane et polarisée dont le vecteur d'onde forme un angle α avec le plan de l'antenne.

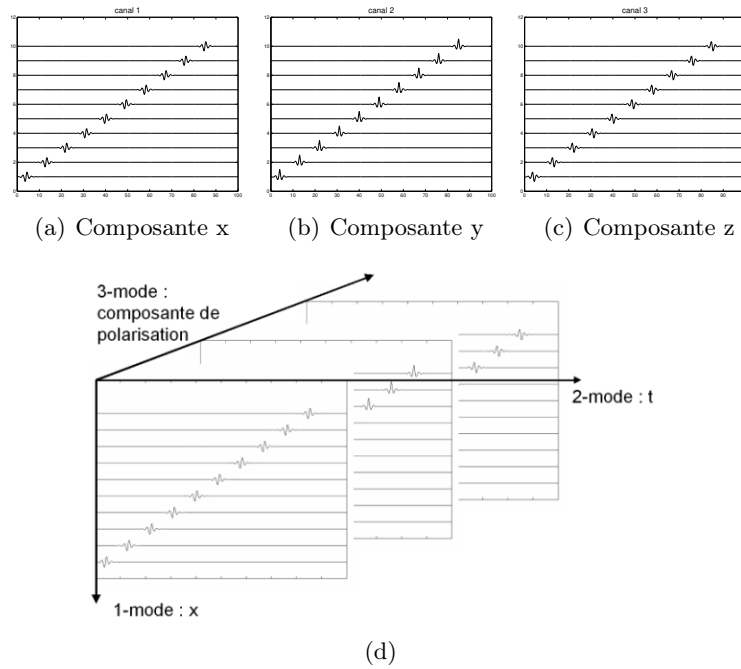


Figure 2.5 — Modélisation tensorielle d'un signal sismique polarisé par le tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$. I_1 : nombre de capteurs multicomposantes. I_2 : nombre d'échantillons temporels. $I_3 = 3$: nombre de composantes de polarisation.

Les signaux sismiques multicomposantes ayant été étudiés en détail dans [39, 40], dans la section suivante, nous nous concentrons sur l'étude des images en couleur et des séquences en

niveaux de gris modélisées par des tenseurs d'ordre trois.

2.2 Présentation du problème

2.2.1 Rappel du cas bidimensionnel : influence du rang sur l'approximation d'une image en niveaux de gris et compression

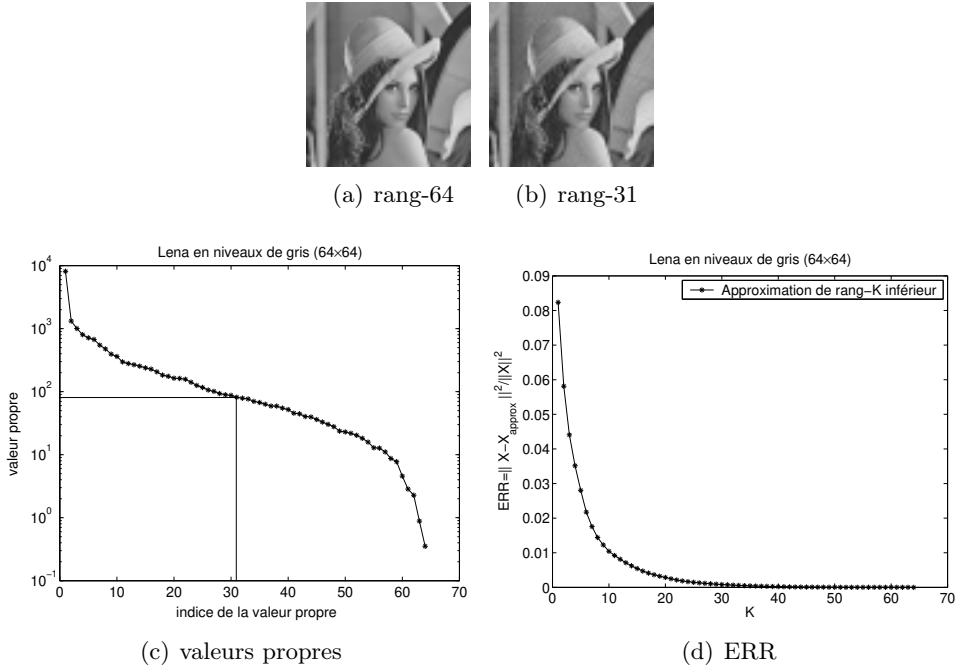


Figure 2.6 — Image initiale de Lena en niveaux de gris, de taille 64×64 . (a) : Espace signal initial de dimension 64. (b) : Approximation de rang-31 de l'image initiale. Sous-espace signal de dimension 31. $ERR = 7.32 \cdot 10^{-4}$. (c) : Évolution des valeurs propres. (d) : Évolution de l'ERR en fonction du rang K .

Avant d'aborder l'influence des rangs n -modaux sur l'approximation d'une image en couleur, nous proposons d'effectuer un bref rappel sur l'influence du rang dans l'approximation matricielle de rang inférieur d'une image en niveaux de gris. Cette étape est fondamentale dans certaines méthodes de compression qui visent à coder les éléments propres de la matrice associée à l'image [3, 30, 53, 77, 75].

L'étape préalable aux techniques de compression d'une image numérique en niveaux de gris par des méthodes algébriques, est généralement de trouver le nombre minimum d'images singulières correspondant à une erreur de reconstruction fixée *a priori*. Les images singulières sont obtenues grâce à la SVD de la matrice associée à l'image initiale [2, 3, 61, 24, 74] et sont définies comme le produit extérieur entre le vecteur singulier gauche et le vecteur singulier droite, correspondant à une valeur singulière de la matrice associée à l'image [2].

Une image en niveaux de gris représente généralement une matrice de rang plein. En effet, l'énergie relative à l'information de l'image est répartie sur l'ensemble des valeurs singulières

de la matrice associée à l'image. Cependant, comme l'illustre la Figure 2.6(c) représentant l'évolution des valeurs propres associées à l'image Lena, la partie la plus importante de l'information utile est répartie sur les valeurs singulières les plus grandes. Les valeurs singulières les plus faibles représentent les énergies associées aux détails de l'images. Grâce à ce résultat bien connu [2, 3], il est possible de reconstruire une image avec un faible nombre de composantes (et, bien sûr, une perte d'information correspondant aux détails) en effectuant l'approximation de rang inférieur associée aux valeurs singulières les plus grandes de l'image.

La Figure 2.6(a) illustre cette reconstruction. Elle représente l'image initiale X de Lena en niveaux de gris de taille 64×64 . La dimension de l'espace d'observation initial est donc $I_1 = I_2 = 64$.

Soit $\hat{X}$, l'approximation de rang- K inférieur de X , et K le nombre minimum d'images singulières nécessaires pour reconstruire l'image initiale avec une Erreur de Reconstruction Relative [24, 67, 32], définie par :

$$ERR = \frac{\|X - \hat{X}\|^2}{\|X\|^2}, \quad (2.1)$$

inférieure à un seuil fixée ξ . La Figure 2.6(b) montre l'approximation $\hat{X}$ de rang-31 de l'image initiale X . L'ERR associée à cette approximation (cf. Figure 2.6(d)) est :

$$ERR = \frac{\sum_{i=K+1}^{I_1} \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{I_1} \lambda_i^2} = 7.32 \cdot 10^{-4}, \quad (2.2)$$

λ_i étant la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de X . Par conséquent, la dimension du sous-espace signal de l'image Lena, associé au seuil $\xi = 7.32 \cdot 10^{-4}$, est $\hat{K} = 31$.

Remarque - Notons que, par construction, la dimension du sous-espace signal 1-modal et celle du sous-espace signal 2-modal de l'image compressée est $\hat{K}$.

2.2.2 Extension au cas des données MM : utilisation de l'approximation tensorielle de TUCKER3

2.2.2.1 Approximation tensorielle par LRTA- (K_1, K_2, K_3) et HOSVD- (K_1, K_2, K_3)

Il est possible d'étendre le concept de reconstruction (avec perte d'information) des images en niveaux de gris, aux images en couleur, grâce à l'utilisation de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou sa forme approchée : la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) .

Appelons $\mathcal{X}$ le tenseur associé à une image en couleur initiale. L'image approximée par LRTA- (K_1, K_2, K_3) est modélisée par le tenseur :

$$\hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}} = \mathcal{X} \times_1 P_{\text{LRTA}}^{(1)} \times_2 P_{\text{LRTA}}^{(2)} \times_3 P_{\text{LRTA}}^{(3)}, \quad (2.3)$$

dans lequel $\forall n = 1, 2, 3$, $P_{\text{LRTA}}^{(n)}$ est l'estimation du projecteur orthonormé sur les K_n vecteurs de base du sous-espace signal n -modal associé au tenseur $\mathcal{X}$, obtenu après convergence de l'algorithme TUCKALS3.

De même, l'image approximée par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est modélisée par le tenseur :

$$\hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}} = \mathcal{X} \times_1 P_{\text{HOSVD}}^{(1)} \times_2 P_{\text{HOSVD}}^{(2)} \times_3 P_{\text{HOSVD}}^{(3)}, \quad (2.4)$$

dans lequel $\forall n = 1, 2, 3$, $P_{\text{HOSVD}}^{(n)}$ est l'estimation du projecteur orthonormé sur le sous-espace signal n -modal, dont une des bases est constituée par les K_n vecteurs singuliers associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la matrice X_n , dépliant dans le n -mode du tenseur $\mathcal{X}$.

2.2.2.2 Critère de l'ERR pour les données MM

Dans le cas d'une image en niveaux de gris, l'étude de l'influence du rang sur l'approximation de rang inférieur de cette image a été rendu possible grâce au critère de l'ERR.

Dans le cas d'une image en couleur $\mathcal{X}$, l'étude de l'influence des rangs n -modaux sur les approximations $\hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}}$ ou $\hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}}$ repose sur l'extension du critère de l'Erreur de Reconstruction Relative (ERR) aux tenseurs :

$$\text{ERR}(K_1, K_2, K_3) = \frac{\|\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\|\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2}, \quad (2.5)$$

dans laquelle $\|\cdot\|$ est la norme tensorielle de Frobenius définie à la section 1.2.4.

L'ERR dépend des paramètres (K_1, K_2, K_3) de l'approximation considérée. Elle prend en compte l'écart quadratique entre chaque élément du tenseur initial et du tenseur approximé et permet de mesurer l'écart global entre ces deux tenseurs.

2.2.3 Objectif de l'étude

De manière à étudier l'influence des rangs n -modaux sur l'approximation d'une image en couleur, nous proposons d'étudier l'évolution de l'ERR(K_1, K_2, K_3) en fonction des paramètres K_1, K_2 et K_3 .

La principale difficulté que nous rencontrons dans cette étude est celle de la visualisation graphique de l'ERR(K_1, K_2, K_3). Nous pouvons, tout d'abord, visualiser les surfaces d'évolution de l'ERR(K_1, K_2, K_3) en fonction de K_1 et K_2 , à K_3 fixé. L'évolution de ces surfaces nous permet de déduire une manière de choisir K_1 et K_2 pour une ERR donnée. Nous pouvons ensuite représenter les courbes d'évolution de l'ERR(K, K, K_3) en fonction de K , à K_3 fixé.

L'étude de ces courbes nous permet de définir les rangs n -modaux $\hat{K}_n$, $n = 1, 2, 3$, d'un tenseur de données MM, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, comme étant les plus petites valeurs des trois paramètres (K_1, K_2, K_3) , telles que l'ERR résultant de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) de $\mathcal{X}$ vérifie :

$$\text{ERR}(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) \leq \xi, \quad (2.6)$$

ξ étant un seuil fixé *a priori*. Nous proposons alors d'étudier dans quelle mesure l'information contenue dans un tenseur de données MM, influence la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné.

D'autre part, l'étude des courbes nous permet de comparer les résultats obtenus par la LRTA- (K_1, K_2, K_3) à ceux obtenus par la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) dans l'approximation d'une image en couleur.

2.3 Influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle d'images en couleur

2.3.1 Exemples traités

Nous considérons, dans cette section, les images en couleur issues des bases de données standard suivantes : "Lena" (2.7(a)), "Baboon" (2.7(b)), "Piments" (2.7(c)), "Gellybeans" (2.7(d)), "Sailboat" (2.7(e)), "Tiffany" (2.7(f)), "Mondrian1" (2.7(g)), et "Mondrian2" (2.7(h)). Ces images sont carrées, de taille 64×64 , et sont modélisées par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 3}$.

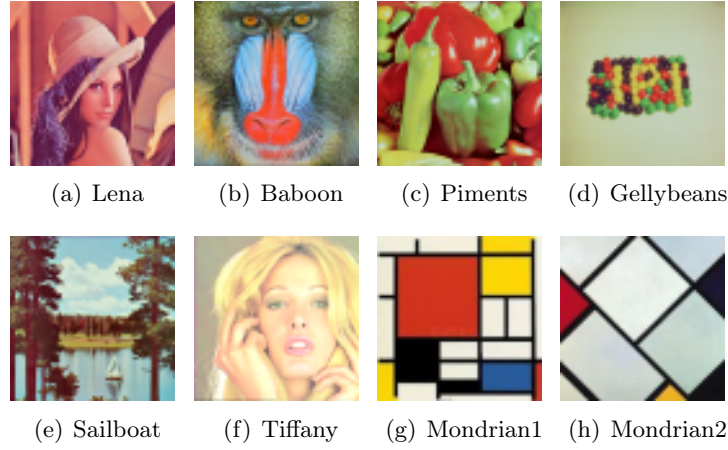


Figure 2.7 — Images en couleur étudiées issues des bases de données standard. Taille : 64×64 .

Nous considérons d'autre part, l'image rectangulaire "Lena2", de taille 64×113 , qui représente la même scène que Lena, mais dans un format spatial qui ne présente pas de symétrie.



(a) Lena2

Figure 2.8 — Image rectangulaire en couleur Lena2. Taille : 64×113 .

Le choix de ces images permet d'étudier l'influence des rangs n -modaux sur les approximations en fonction du contenu de l'image qui dans les cas considérés est très varié partialement et spécialement.

2.3.2 Évolution de l'ERR en fonction des paramètres

Pour chacune des images considérées, modélisée par le tenseur $\mathcal{X}$, nous déterminons les approximations $\hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}}$ et $\hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}}$ pour différents paramètres K_n , $n = 1, 2, 3$. Pour chacune de ces approximations, nous représentons :

1. Les surfaces de l'ERR(K_1, K_2, K_3) obtenues pour un rang 1-modal K_1 et un rang 2-modal K_2 variables, et un rang 3-modal K_3 fixé à différentes valeurs.
2. Les courbes de l'ERR(K_1, K_2, K_3) obtenues pour $K_1 = K_2 = K$ variable, et K_3 fixé. Ces courbes permettent la comparaison entre la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) .
3. Les images en couleur approximées par les deux méthodes pour des rangs n -modaux (K_1, K_2, K_3) choisis *a priori*.

Les pages 43 à 51 présentent les principales surfaces, courbes et images relatives à l'étude de l'influence des paramètres K_n , $n = 1, 2, 3$, des images Lena, Lena2, Sailboat et Mondrian1. Les commentaires relatifs à ces simulations débutent à la page 51.

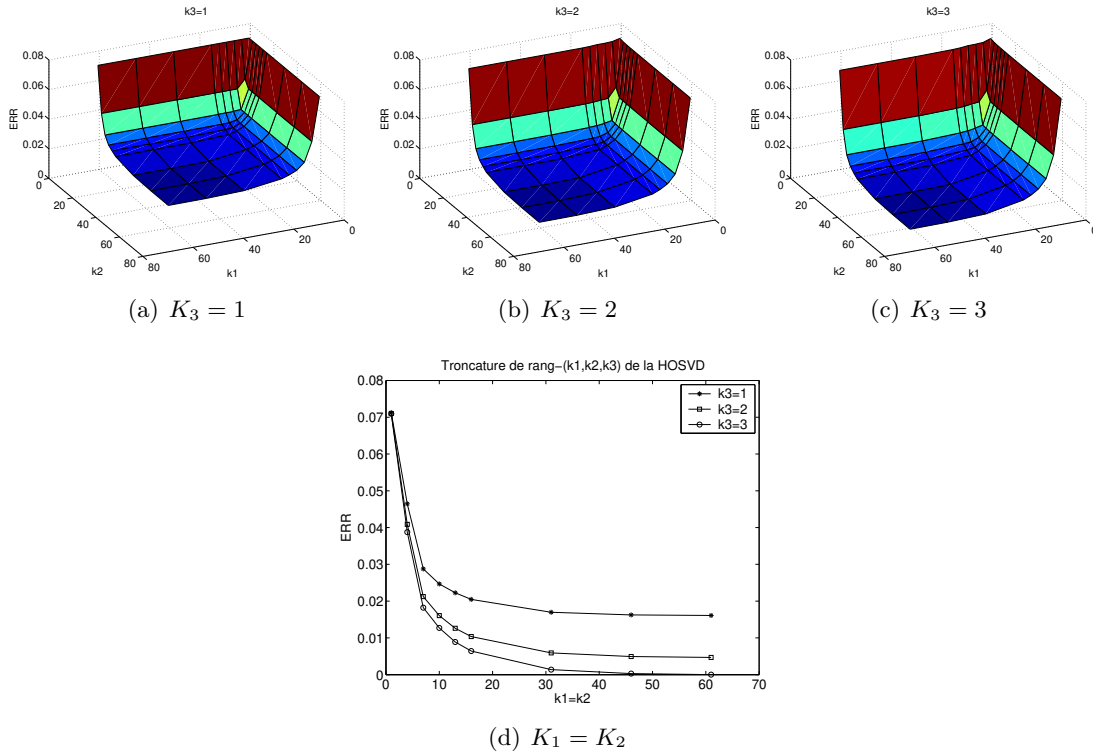


Figure 2.9 — ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".



Figure 2.10 — Images des HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena".

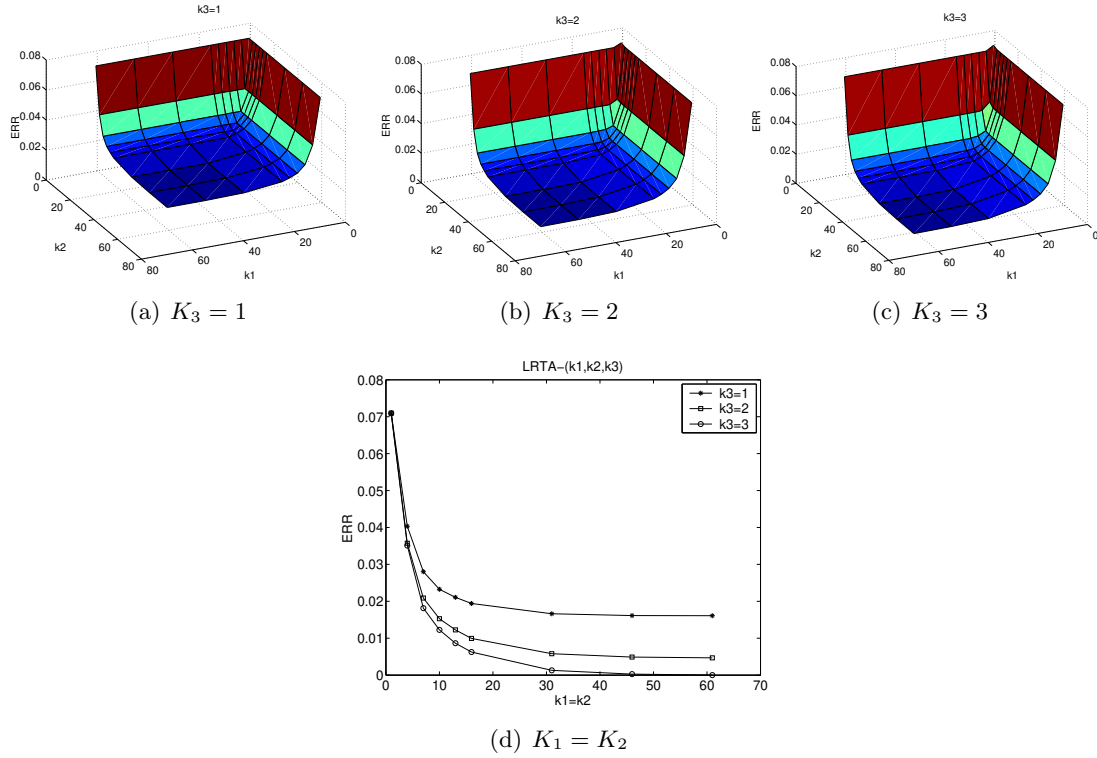


Figure 2.11 — ERR pour la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".



Figure 2.12 — Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena".

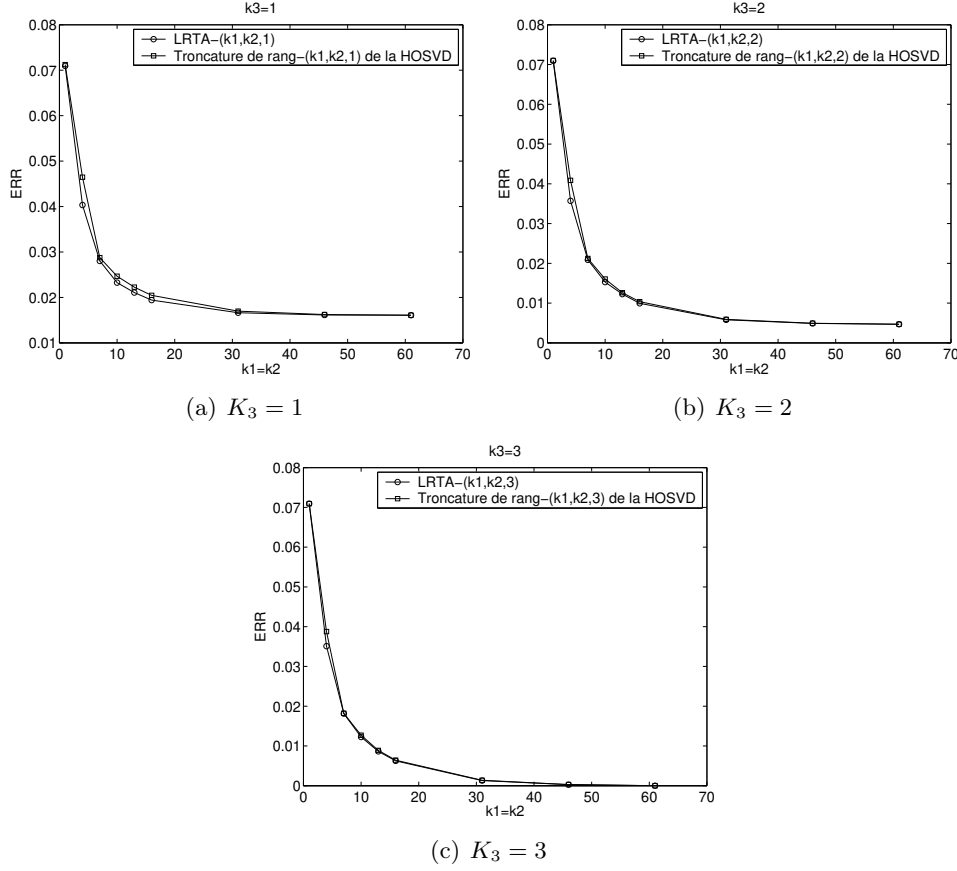


Figure 2.13 — Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".

Dans ces premières simulations, nous pouvons remarquer la similitude entre les surfaces et courbes ainsi que les images approximées données par la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) . Cette similarité est confirmée par la Figure 2.13 qui présente la comparaison des ERR données par ces deux méthodes tensorielles.

Nous retrouvons cette similarité des résultats dans les simulations concernant les images Lena2, Sailboat et Mondrian1. Pour ces images, nous ne présentons donc, dans les pages suivantes, que les surfaces, courbes et images approximées données par la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) . Il est cependant possible de vérifier cette similarité grâce aux figures présentant la comparaison des ERR données par la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) . Les images approximées, issues de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) , sont aussi disponibles en annexe A.

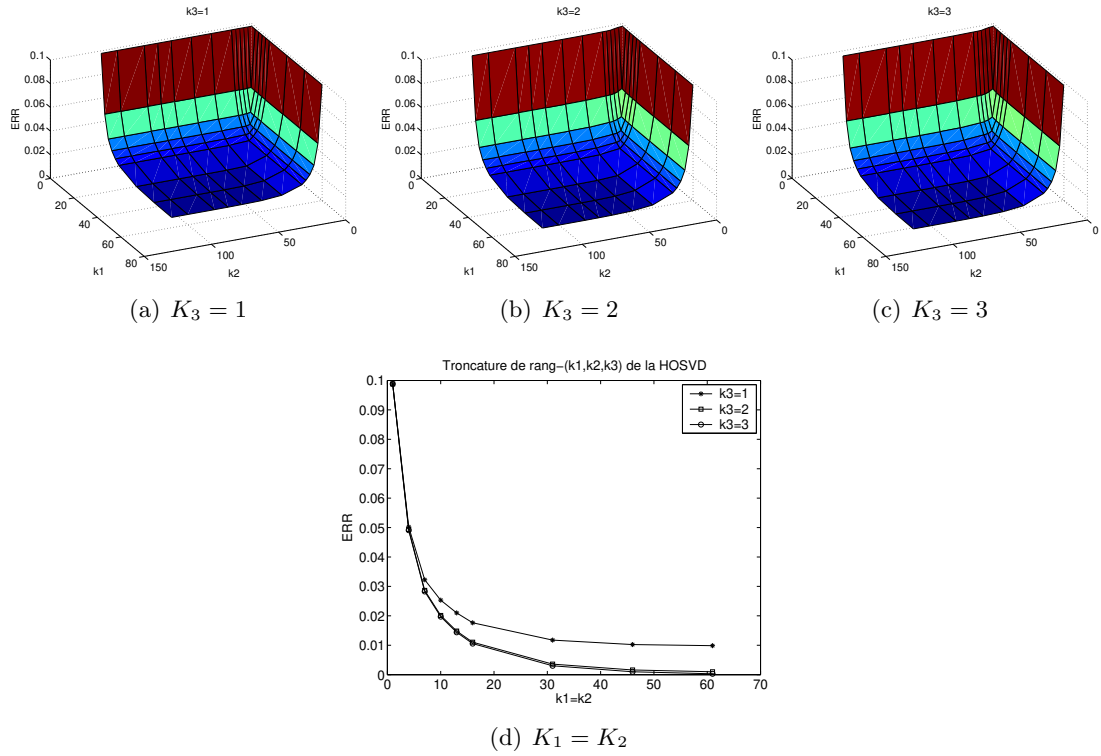


Figure 2.14 — ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena2" de taille $64 \times 113 \times 3$.

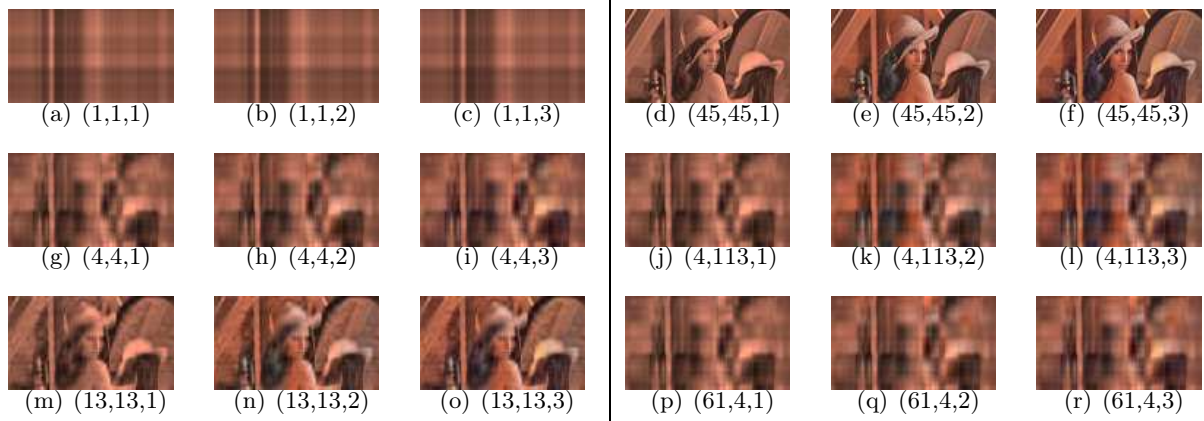


Figure 2.15 — Images des HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena2".

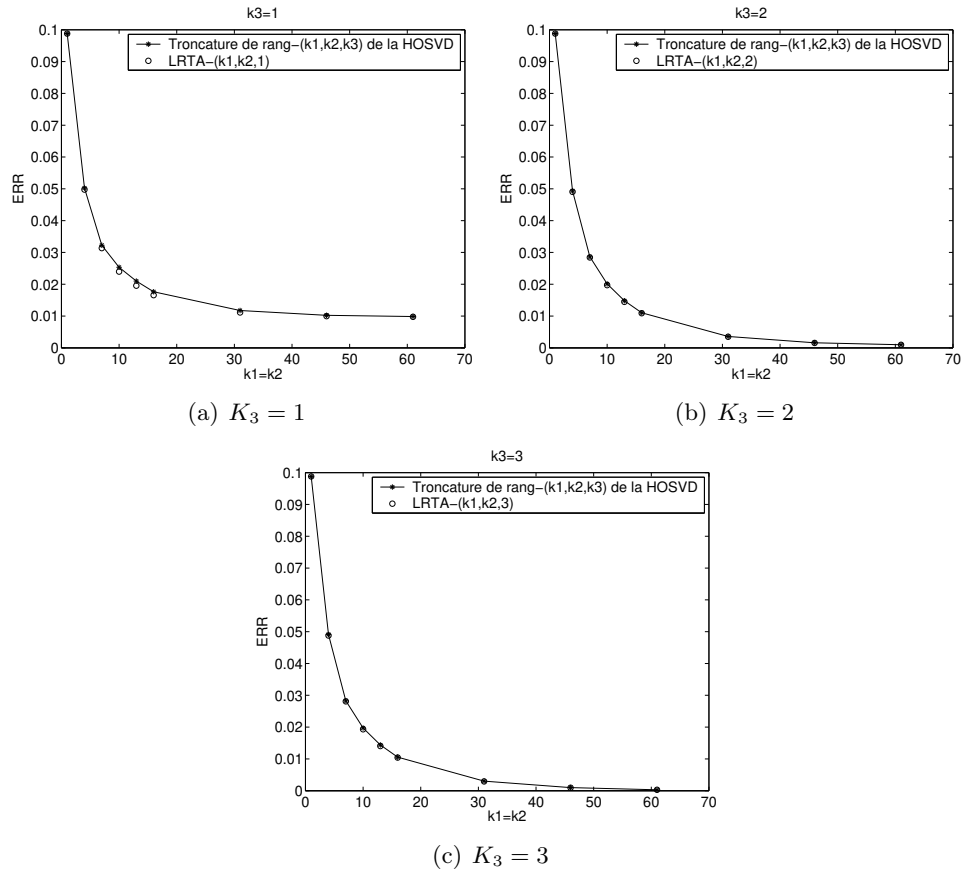


Figure 2.16 — Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena2".

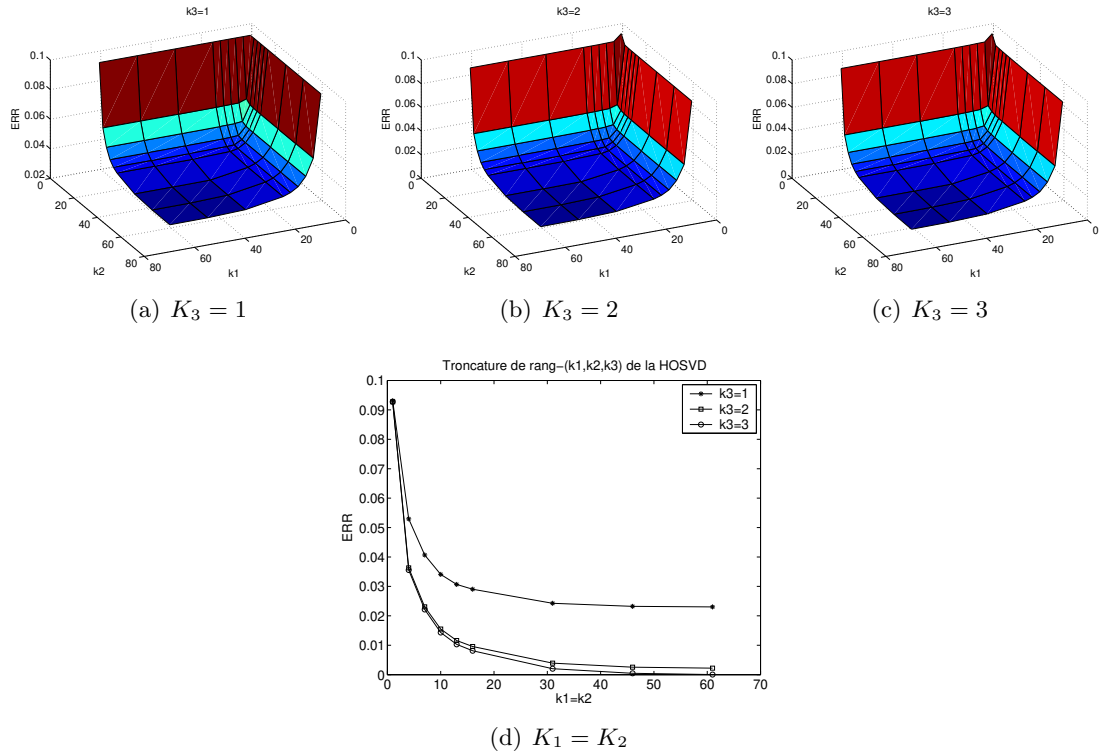


Figure 2.17 — ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".

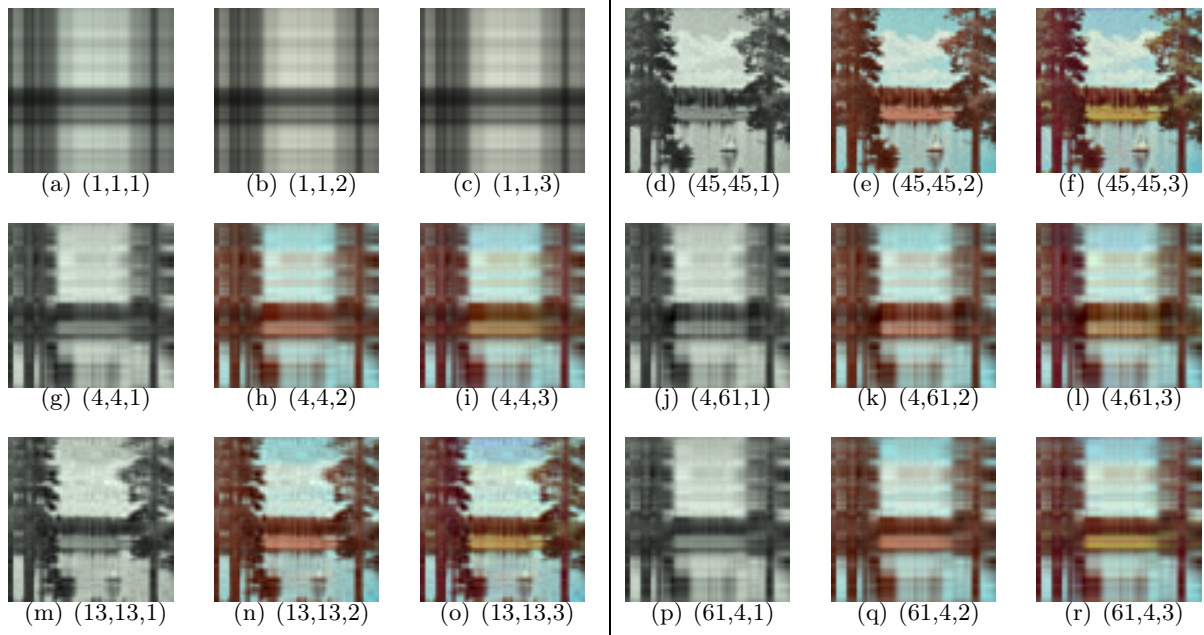


Figure 2.18 — Images de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Sailboat".

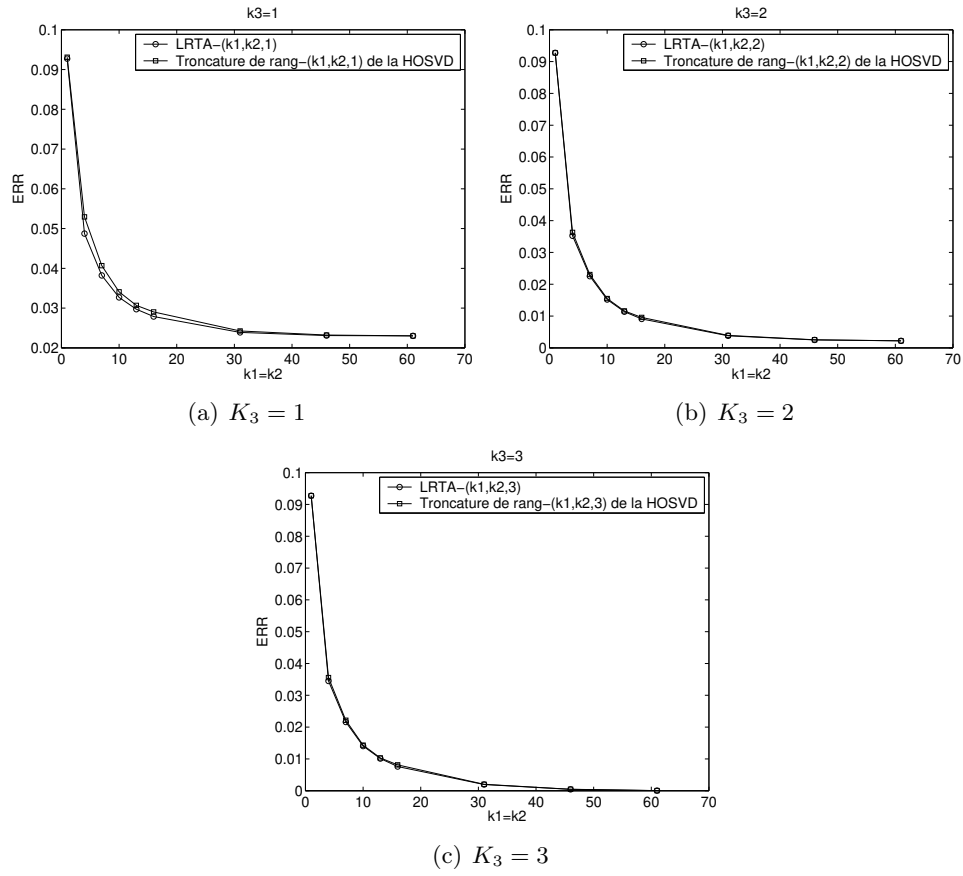


Figure 2.19 — Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".

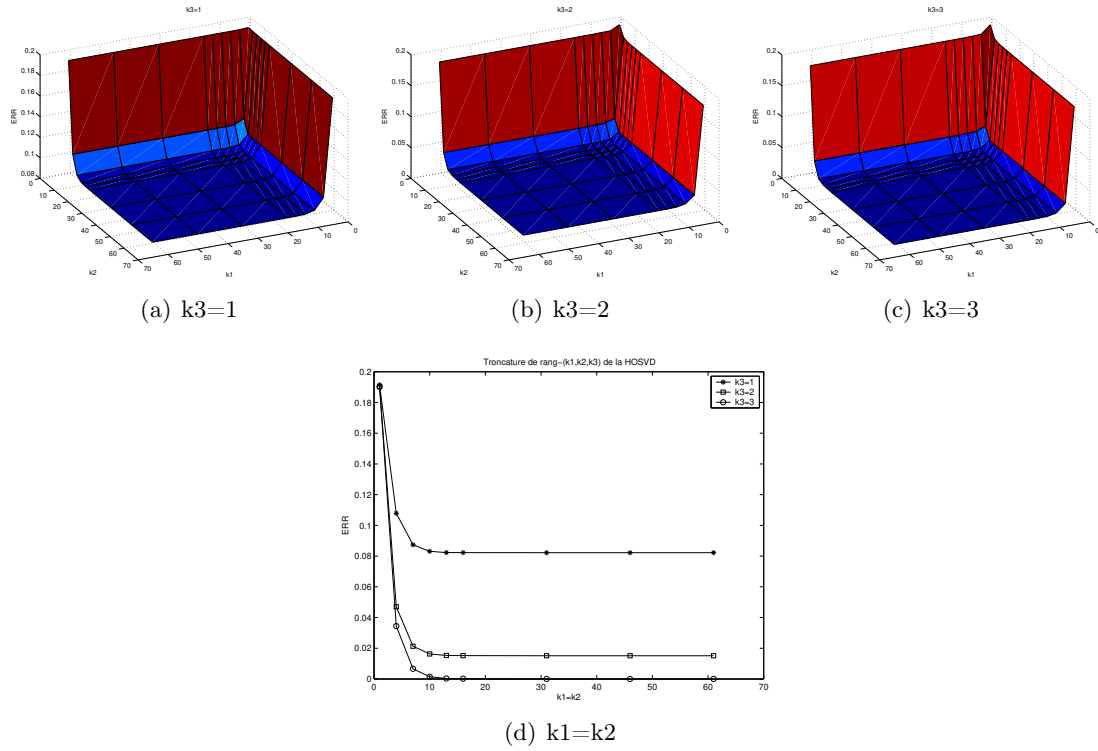


Figure 2.20 — ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mon-drian1".

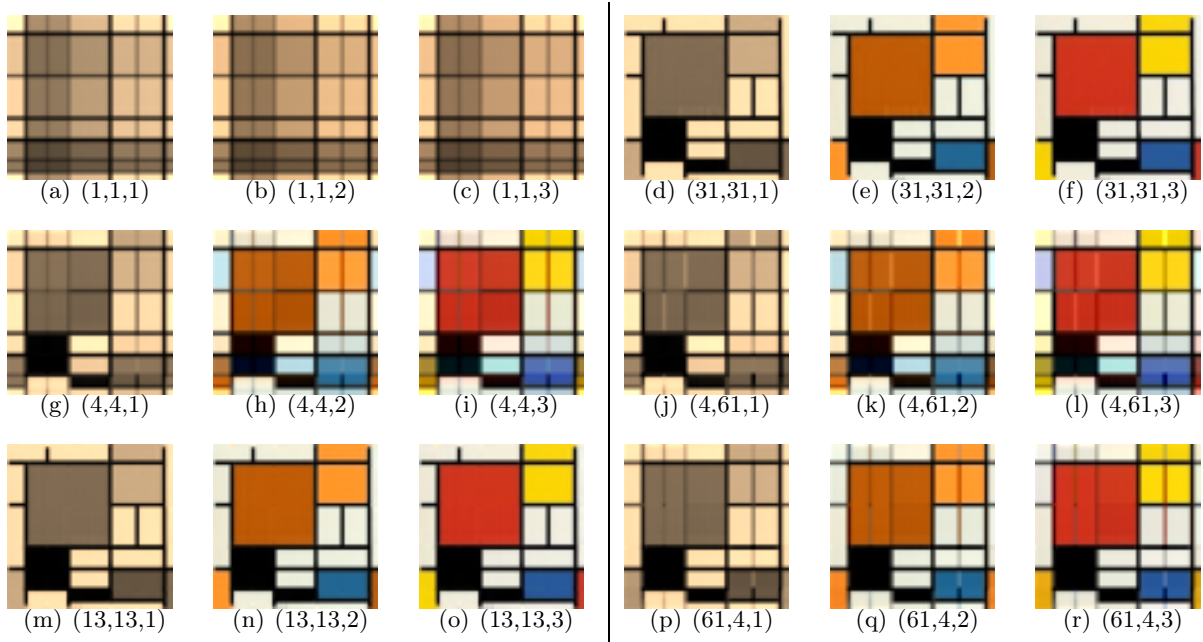


Figure 2.21 — Images de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Mon-drian1".

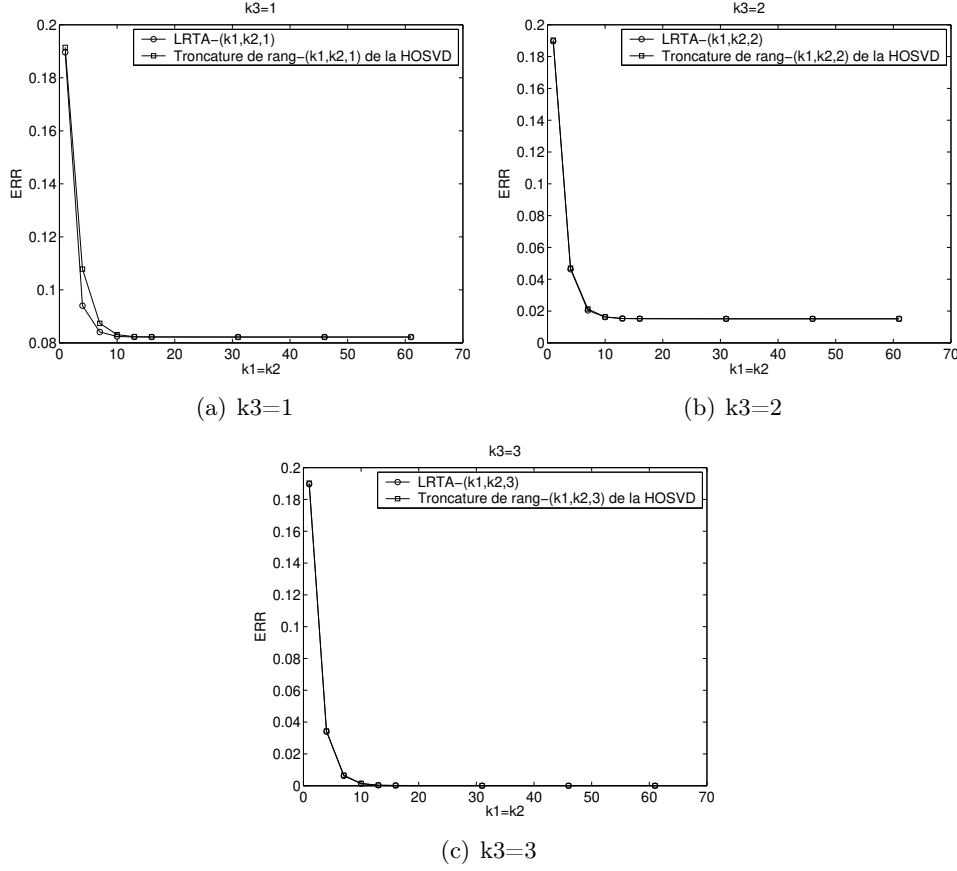


Figure 2.22 — Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondrian1".

Un récapitulatif des courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K , relative à la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) , pour K_3 fixé, du tenseur associé à toutes les images en couleur de la Figure 2.7 sont présentées sur les figures A.5 et A.6 de l'annexe A.

2.3.2.1 Symétrie des surfaces $ERR(K_1, K_2, K_3)$

Sur l'ensemble des images traitées, ainsi que pour les deux traitements par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et par LRTA- (K_1, K_2, K_3) , il est possible d'effectuer la même remarque concernant la symétrie des surfaces $ERR(K_1, K_2, K_3)$ obtenues pour K_3 fixé. Les commentaires suivants sont associés au cas particulier des images en couleur Lena (Figure 2.7(a)) de taille $64 \times 64 \times 3$ et Lena2 (Figure 2.8) de taille $64 \times 113 \times 3$, mais sont aussi valables pour les autres images en couleur traitées :

1. Les Figures 2.14(a)-2.9(c), et 2.11(a)-2.11(c) montrent que les surfaces de l' $ERR(K_1, K_2, K_3)$ pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, correspondant à la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 associé à Lena, sont toutes symétriques par rapport au plan $(K_1 = K_2)$, quelle que soit la valeur du rang 3-modal K_3 .
2. Une propriété similaire se retrouve aussi sur des images en couleur rectangulaires telle que

l'image Lena2, cf. Figures 2.14(a)-2.9(c). Les surfaces de l' $ERR(K_1, K_2, K_3)$ pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, correspondant à la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 associé à Lena2 présentent une pseudo-symétrie par rapport au plan $(K_1 = K_2)$. Cette propriété est aussi présente sur les surfaces des $ERR(K_1, K_2, K_3)$ à K_3 fixé, issues la LRTA- (K_1, K_2, K_3) de l'image.

Cette propriété de symétrie³ (ou de pseudo-symétrie⁴) implique que les erreurs de reconstruction obtenues par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et par LRTA- (K_1, K_2, K_3) des images en couleur et des séquences d'images sont telles que :

$$\forall (K_1, K_2, K_3), \quad ERR(K_1, K_2, K_3) = ERR(\inf(K_1, K_2), \inf(K_1, K_2), K_3). \quad (2.7)$$

Il est possible de vérifier ce résultat par exemple sur les images en couleur résultant de l'approximation par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) ou par LRTA- (K_1, K_2, K_3) de l'image Lena. En effet, les Figures 2.10(g)-2.10(i), 2.10(j)-2.10(l) et 2.10(p)-2.10(r), montrent que les images résultant respectivement de la HOSVD- $(4, 4, i)$, de la HOSVD- $(4, 61, i)$, et de la HOSVD- $(61, 4, i)$, pour i variant de 1 à 3, sont identiques.

Par conséquent, pour les exemples traités, l'étude des approximations des images en couleur par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) ou par LRTA- (K_1, K_2, K_3) peut simplement s'effectuer pour des rangs 1-modal et 2-modal égaux, sans perte de généralité.

Dans la suite, nous ne considérerons plus que le cas où $K_1 = K_2 = K$.

Remarque sur l'égalité des rangs K_1 et K_2 - Notons que ce résultat est en accord avec le cas matriciel pour lequel l'approximation de rang- K inférieur d'une matrice implique, par construction, que $K_1 = K_2 = K$.



Figure 2.23 — Canaux rouge (a), vert (b) et bleu (c) de l'image Lena.

L'égalité des paramètres $K_1 = K_2$ dans le cas tensoriel peut s'expliquer par le fait, dans les images en couleur traitées, telle que l'image Lena, le contenu spatial est identique sur chaque canal de couleur et totalement corrélée (cf. Figure 2.23 représentant les trois canaux de couleur de l'image Lena). De ce fait, les rangs des matrices modélisant les images en niveaux de gris associées à chaque canal de couleur sont égaux. Les bases décrivant le sous-espace signal de chaque canal de couleur peuvent cependant être différentes. Néanmoins, le rang de l'ensemble des vecteurs colonnes est égal au rang de l'ensemble des vecteurs lignes issus de toutes les trames⁵. Ceci explique que $K_1 = K_2 = K$. D'autre part, le rang K est égal au nombre de vecteurs colonnes (ou de vecteurs lignes) libres. Il est généralement supérieur au rang des images en niveaux de gris associées à chaque canal de couleur.

³Pour les images carrées.

⁴Pour les images rectangulaires.

⁵En d'autres termes, les rangs des dépliantes X_1 et X_2 sont égaux.

2.3.2.2 Équivalence des résultats concernant les approximations par HOSVD- (K, K, K_3) et par LRTA- (K, K, K_3) d'images en couleur

Comme le montre les figures comparatives 2.13 et 2.16 pour les images en couleur de Lena et Lena2, quelles que soient les valeurs de K , les méthodes d'approximation par HOSVD- (K, K, K_3) et par LRTA- (K, K, K_3) donnent les mêmes ERR, lorsque la valeur du rang 3-modal est suffisamment grande.

Ceci est vérifié par exemple sur les images en couleur 2.10(e) et 2.12(e) représentant respectivement la HOSVD-(31,31,2) et la LRTA-(31,31,2) de l'image initiale Lena (figure 2.7(a)) pour lesquelles il n'apparaît aucune différence visuelle. Cette remarque tient aussi pour tous les autres rangs n -modaux considérés ainsi que pour toutes les autres images étudiées. Des résultats identiques concernant les images Sailboat et Mondrian1 peuvent être consultés en annexe A.

Étant donné que la HOSVD- (K, K, K_3) constitue l'initialisation de l'algorithme TUCKALS3, nous aurions pu nous attendre à ce que, pour des rangs n -modaux (K, K, K_3) donnés, la LRTA- (K, K, K_3) donne une ERR plus faible que celle donnée par la HOSVD- (K, K, K_3) d'un tenseur de données. Cependant, au vu des résultats obtenus, nous pouvons considérer que la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) sont équivalentes en ce qui concerne la reconstruction des images en couleur traitées.

Par conséquent, *pour les exemples choisis*, nous pouvons considérer que l'algorithme TUCKALS3 n'apporte pas d'amélioration à la reconstruction des images en couleur par rapport à une simple HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur de données. De plus, le gain en temps de calcul de la HOSVD- (K, K, K_3) par rapport à la LRTA- (K, K, K_3) est très important pour un résultat final similaire.

En conclusion, pour l'approximation et la reconstruction des images en couleur traitées, nous ferons usage de la HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur de données MM.

2.3.3 Lien entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ associés à une ERR donnée et le contenu d'une image en couleur

Dans cette section, nous proposons d'étudier dans quelle mesure le contenu spatial et les couleurs présentes dans une image influence la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné.

2.3.3.1 Contenu spatial : 1-mode et 2-mode

Nous pouvons remarquer que, pour une ERR donnée⁶, le nombre de composantes nécessaires pour décrire le contenu spatial d'une image est d'autant plus faible que la structure spatiale (les contours, et les zones définissant les objets de l'image) est verticale ou horizontale, c'est-à-dire parallèle aux lignes ou aux colonnes.

Ceci se vérifie en comparant les courbes d'évolution de l'ERR en fonction de K , à K_3 fixé, relative à l'image Lena (dont la structure spatiale ne présente aucune dominante horizon-

⁶Ici, le seuil est fixé à 10^{-3} .

tale ou verticale) et relative à l'image Mondriaan1 (dont la structure spatiale est nettement horizontale et verticale) :

1. Dans le cas de Lena (cf. Figure 2.9), nous pouvons remarquer que l'ERR est inférieure à $\xi = 10^{-3}$ à partir d'un rang K égale à 45. Les rangs 1-modaux et 2-modaux de Lena peuvent donc être estimés à 45. Les images approximées correspondantes sont présentées sur les Figures 2.10(d)-2.10(f).
2. En revanche, dans le cas de Mondriaan1 (cf. Figure 2.20(d)), l'ERR devient inférieure à $\xi = 10^{-3}$ à partir d'un rang K égal à 13. Les rangs 1-modaux et 2-modaux de Mondriaan1, associés à une $ERR < 10^{-3}$, sont donc égaux à 13. Les images approximées correspondantes sont présentées sur les Figures 2.21(d)-2.21(f).

La comparaison de ces deux images nous permet de conclure que pour une ERR donnée, la dimension des sous-espaces signal 1-modal et 2-modal est d'autant plus faible que la répartition spatiale de l'image est horizontale ou verticale.

Pour une structure spatiale non horizontale ou verticale, comme des structures diagonales, un réarrangement des données tensorielles, différent des vecteurs n -modaux imposés par les matrices dépliantes de l'image, peut être adopté. Un réarrangement « hybride » des données respectant la structure spatiale des données (par exemple un déploiement des données suivant des directions obliques) permet de concentrer l'information sur un nombre restreint de composantes n -modales [60]. Lorsque l'image ne présente pas de directions principales, un réarrangement pseudo-aléatoire, comme le parcours de Peano [82], qui ne privilégie aucune direction, permet, entre autre, de prendre en compte la cohérence spatiale d'une image.

2.3.3.2 Composantes de couleur : 3-mode

Intéressons nous maintenant aux composantes de couleur décrites par le 3-mode d'une image.

Étant donné que la $LRTA-(K, K, K_3)$ et sa forme approchée, la $HOSVD-(K, K, K_3)$, permettent de réaliser une ACP multimodale effectuée sur les trois n -modes du tenseur de données, l'action de ces deux approximations sur le 3-mode revient à déterminer les teintes principales de l'image en couleur. Nous avons montré dans la section précédente, que les résultats donnés par la $LRTA-(K, K, K_3)$ et la $HOSVD-(K, K, K_3)$ sont quasiment identiques, par conséquent, nous pourrions tirer nos conclusions à partir des courbes et images issues de la $HOSVD-(K, K, K_3)$.

Évolution de l'ERR en fonction de K_3 - Les courbes d'évolution de l'ERR en fonction de K (cf. Figure 2.9(d) correspondant à l'image Lena) montrent que, quel que soit le nombre de composantes de couleur K_3 considéré, l'ERR ne présente plus de variations marquées à partir d'un rang 1-modal et 2-modal K supérieur à 31. D'autre part, l'ERR correspondant à ce « palier » est d'autant plus faible que le nombre de composantes de couleur K_3 est grand. Elle devient évidemment nulle lorsque toutes les composantes de couleur sont prises en compte (i.e. pour $K_3 = 3$). À partir d'un certain rang K (variable selon le contenu de l'image), le rang K_3 détermine l'ERR finale de l'approximation.

Cette propriété est vérifiée sur l'ensemble des images considérées (cf. Figure A.5).

rangs	images ERR < 10^{-3}		
	Lena	Sailboat	Mondriaan1
$\hat{K}_1$	45	45	13
$\hat{K}_2$	45	45	13
$\hat{K}_3$	3	2	3
Figure	2.9	2.18	2.20

Tableau 2.1 — Rangs n -modaux $\hat{K}_n$ correspondant à une ERR < 10^{-3} , des tenseurs associés aux images en couleur.

Cas particulier d'une image à deux teintes dominantes - Lorsque seulement deux composantes de couleur sont présentes, comme c'est le cas dans l'image Sailboat, les courbes des ERR correspondant à $K_3 = 2$ et $K_3 = 3$ sont confondues (cf. Figure 2.17(d)) :

$$\forall K, \quad |ERR(K, K, 2) - ERR(K, K, 3)| \simeq 0. \quad (2.8)$$

Cette propriété se vérifie sur les images de la Figure 2.18 pour lesquelles les troncatures de rang- (K, K, K_3) obtenues pour $K_3 = 2$ et $K_3 = 3$ sont identiques (cf. les images des Figures 2.18(d) et 2.18(e) obtenues pour $K = 31$). Cette propriété montre que le rang 3-modal $\hat{K}_3$ de cette image peut être considéré comme égal à 2. En effet :

$$\exists K = 31 \quad / \quad \forall K_3 \geq 2, \quad ERR(31, 31, K_3) < \xi = 10^{-3}. \quad (2.9)$$

Nous avons retrouvé des propriétés identiques pour les images Piments et Mondrian2.

Les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ des images Lena, Sailboat et Mondrian1, associés à une ERR < $\xi = 10^{-3}$, obtenus à partir de l'évolution de l'ERR(K, K, K_3) en fonction de K , pour K_3 fixé, sont regroupés dans le tableau 2.1.

Les résultats des sections 2.3.2 et 2.3.3 ont été établis dans le cas des images en couleur dont le nombre de composantes couleur (dans le 3-mode) est réduit au nombre de trois, et pour lesquels le contenu spatial des images en niveaux de gris correspondant à chaque canal de couleur est identique.

Dans la section suivante, nous proposons d'étendre l'étude de l'influence des paramètres K_1 , K_2 et K_3 sur l'approximation des données MM modélisées par un tenseur d'ordre trois, lorsque :

1. le nombre de composantes 3-modales est supérieur à trois,
2. le contenu de chaque « tranche » bidimensionnelle associée à chaque couleur présente le même contenu spatial.

Nous proposons d'effectuer cette étude sur des séquences d'images en niveaux de gris. En effet, celles-ci sont des données MM susceptibles de remplir les deux conditions précédentes.

2.4 Influence des rangs n -modaux sur l'approximation tensorielle de séquences d'images en niveaux de gris

De même que dans le cas des images en couleur, il est possible d'étendre le concept de reconstruction (avec perte d'information) aux séquences d'images en niveaux de gris, grâce à l'utilisation de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou sa forme approchée : la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) . L'étude de l'influence des rangs n -modaux sur les approximations $\hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}}$ et $\hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}}$ du tenseur $\mathcal{X}$ modélisant une séquence d'images en niveaux de gris est encore rendu possible en analysant de l'évolution de l'ERR en fonction des paramètres K_1 , K_2 et K_3 .

Dans la section suivante, nous présentons les séquences avec lesquelles nous effectuons notre étude.

2.4.1 Exemples traités

Nous considérons, trois séquences d'images en niveaux de gris composées de 10 trames comportant chacune 64 lignes et 64 colonnes représentant :

1. Un carré noir sur fond blanc ayant un mouvement rectiligne uniforme de gauche à droite (Figures 2.24(a) - 2.24(j)), modélisé par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 10}$, appelée "Séquence 1".
2. Un carré noir sur fond blanc ayant un mouvement rectiligne uniforme du coin en bas à gauche au coin en haut à droite de l'image suivant la diagonale (Figures 2.25(a) - 2.25(j)), modélisé par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 10}$, appelée "Séquence 2".
3. Un disque présentant un gradient angulaire du niveaux de gris, ayant un mouvement de rotation uniforme (Figures 2.26(a) - 2.26(j)), modélisé par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 10}$, appelée "Séquence 3".

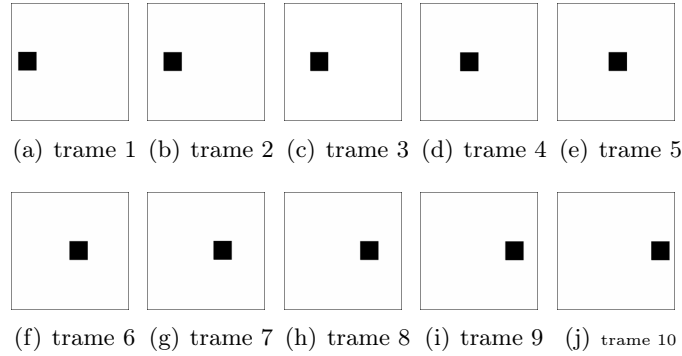


Figure 2.24 — Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement rectiligne uniforme horizontal d'un carré noir sur fond blanc (Séquence 1).

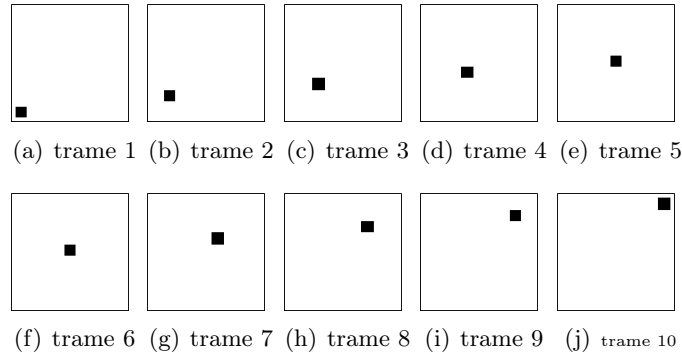


Figure 2.25 — Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement rectiligne uniforme oblique d'un carré noir sur fond blanc (Séquence 2).

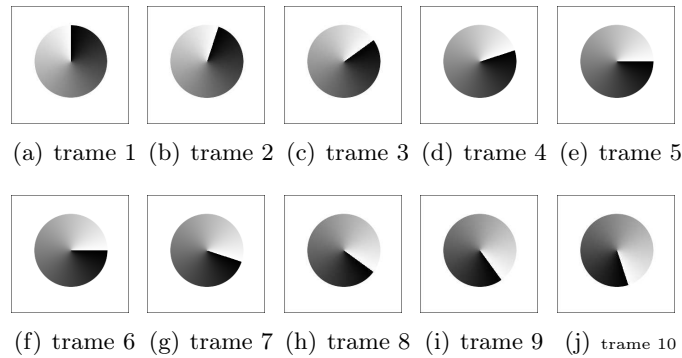


Figure 2.26 — Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement de rotation uniforme d'un disque en gradient angulaire de niveau de gris (Séquence 3).

Dans chaque séquence, les variations de scène entre chacune des trames sont liées uniquement au mouvement des objets et non à une modification morphologique de ceux-ci. D'autre part, pour la Séquence1 et 2, les zones spatiales occupées par les objets de deux trames consécutives ne présentent aucune intersection. Pour la Séquence3, seule la direction de l'objet est prise en compte. Ce choix nous permet d'étudier dans quelle mesure les différentes positions des objets données par des mouvements simples (tels que les translations rectilignes horizontales et diagonales et les rotations d'objets) influencent l'approximation des tenseurs associés à ces séquences.

Le choix d'un objet carré dont les bords sont parallèles aux lignes et aux colonnes de chacune des trames est aussi important car il peut être décrit par un faible nombre de composantes spatiales.

Pour une ERR donnée, nous nous attachons à étudier l'influence des rangs n -modaux K , et plus spécifiquement K_3 sur la reconstruction de chaque trame d'une séquence.

2.4.2 Évolution de l'ERR en fonction des paramètres

De même que pour les images en couleur, nous déterminons les approximations $\hat{\mathcal{X}}_{\text{LRTA}}$ et $\hat{\mathcal{X}}_{\text{HOSVD}}$ pour différents paramètres K_n , $n = 1, 2, 3$. Pour chacune de ces approximations, nous représentons :

1. Les surfaces de l'ERR(K_1, K_2, K_3) obtenues pour un rang 1-modal K_1 et un rang 2-modal K_2 variables, et un rang 3-modal K_3 fixé à différentes valeurs. Ces surfaces sont présentées
2. Les courbes de l'ERR(K_1, K_2, K_3) obtenues pour $K_1 = K_2 = K$ variable, et K_3 fixé. Ces courbes permettent la comparaison entre la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) .
3. Les trames des séquences approximées par les deux méthodes pour des rangs n -modaux (K_1, K_2, K_3) choisis *a priori*.

Nous présentons, dans les pages 59 à 63, les surfaces, courbes et images relatives à l'étude de l'influence des paramètres K_n , $n = 1, 2, 3$, de la séquence3. Les résultats concernant les séquences Séquence1 et Séquence2, sont présentées en annexe A. Pour ces deux séquences, comme dans le cas des images en couleur, la similarité des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) nous amène à présenter uniquement les résultats obtenus par la HOSVD- (K, K, K_3) ainsi que les courbes de comparaison entre la HOSVD- (K, K, K_3) et la LRTA- (K, K, K_3) .

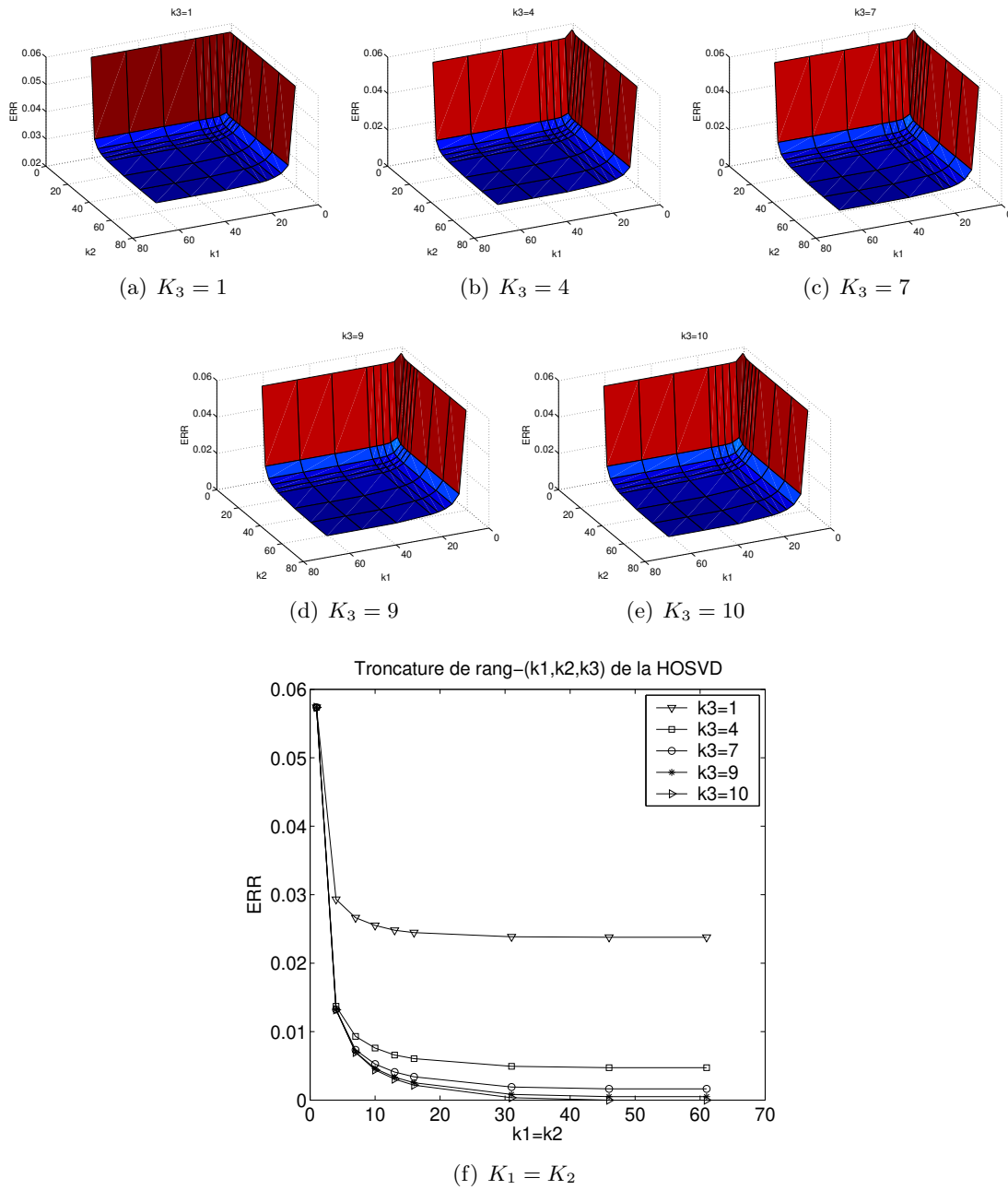


Figure 2.27 — ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.

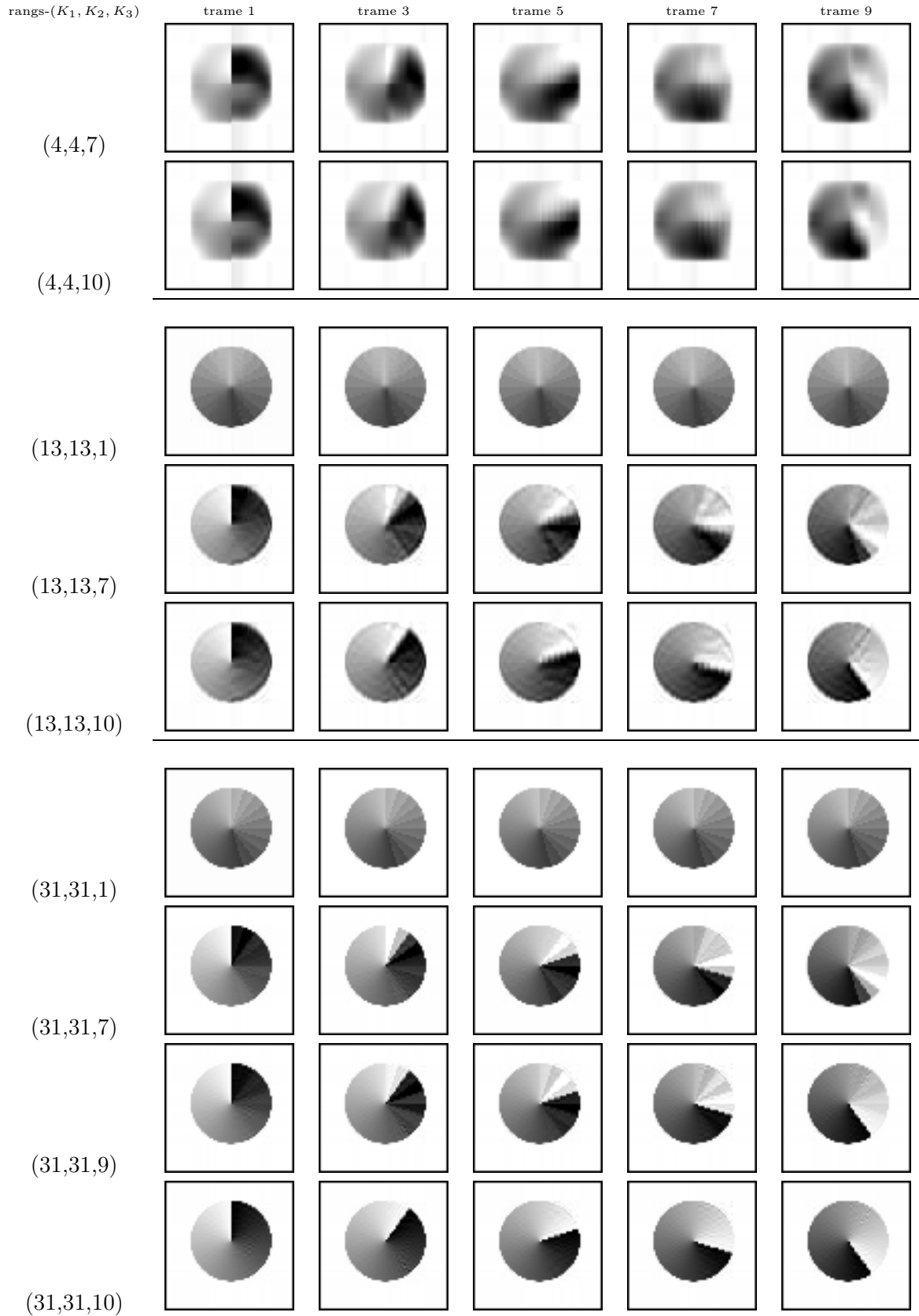


Figure 2.28 — Séquences résultant de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à la Séquence 3.

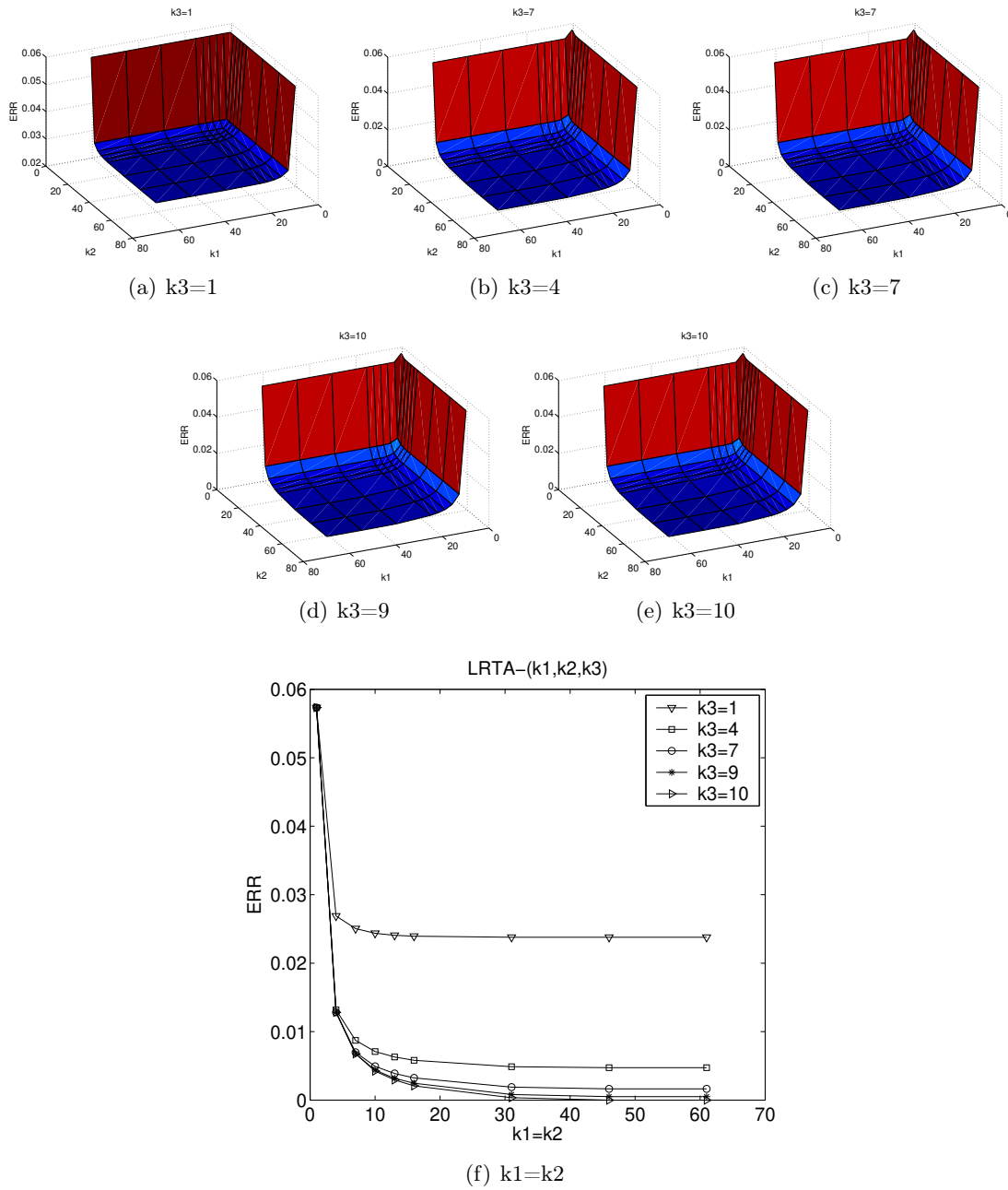


Figure 2.29 — ERR pour la LRTA-(k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.

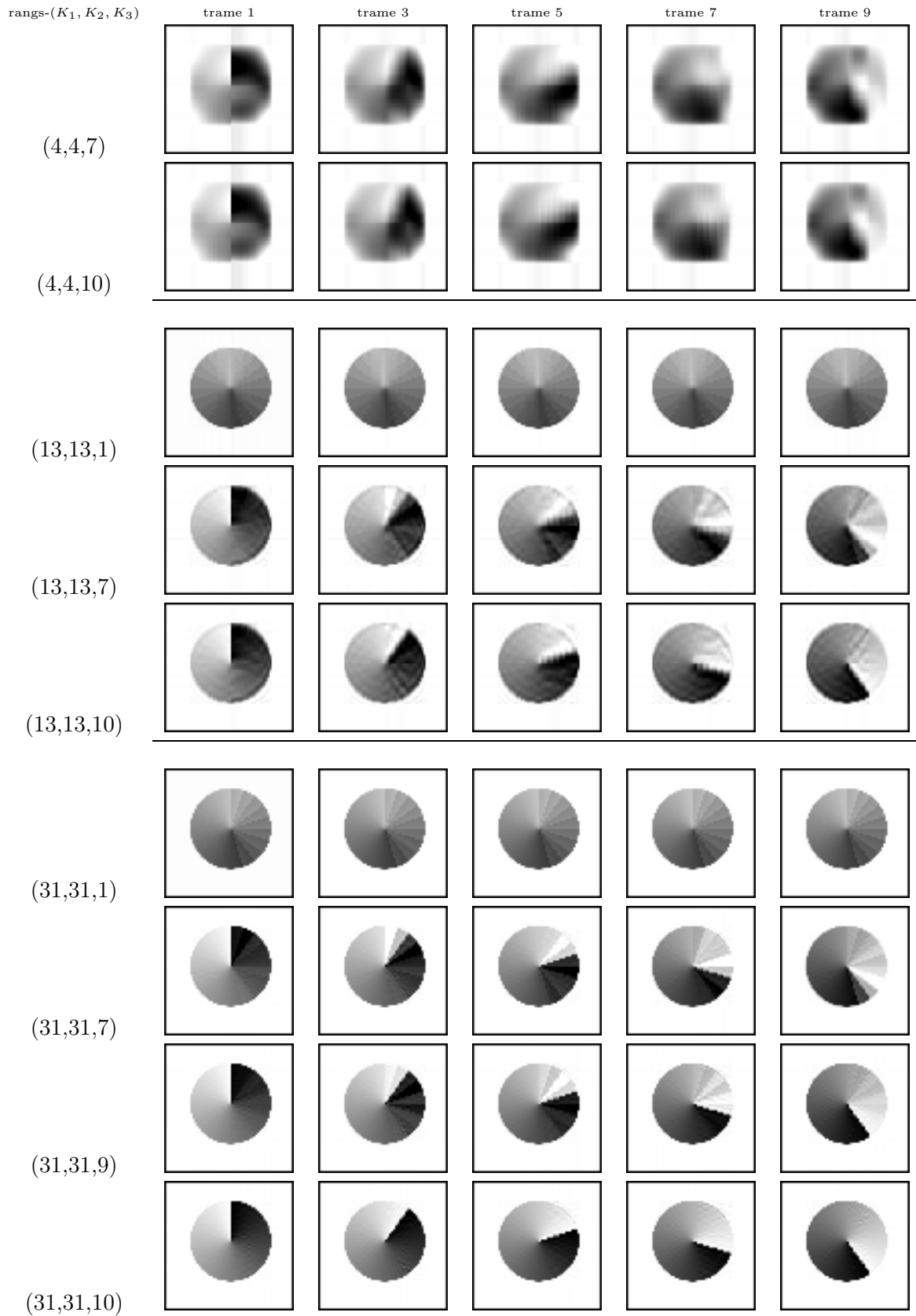


Figure 2.30 — Séquences résultant des LR T A- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à la Séquence 3.

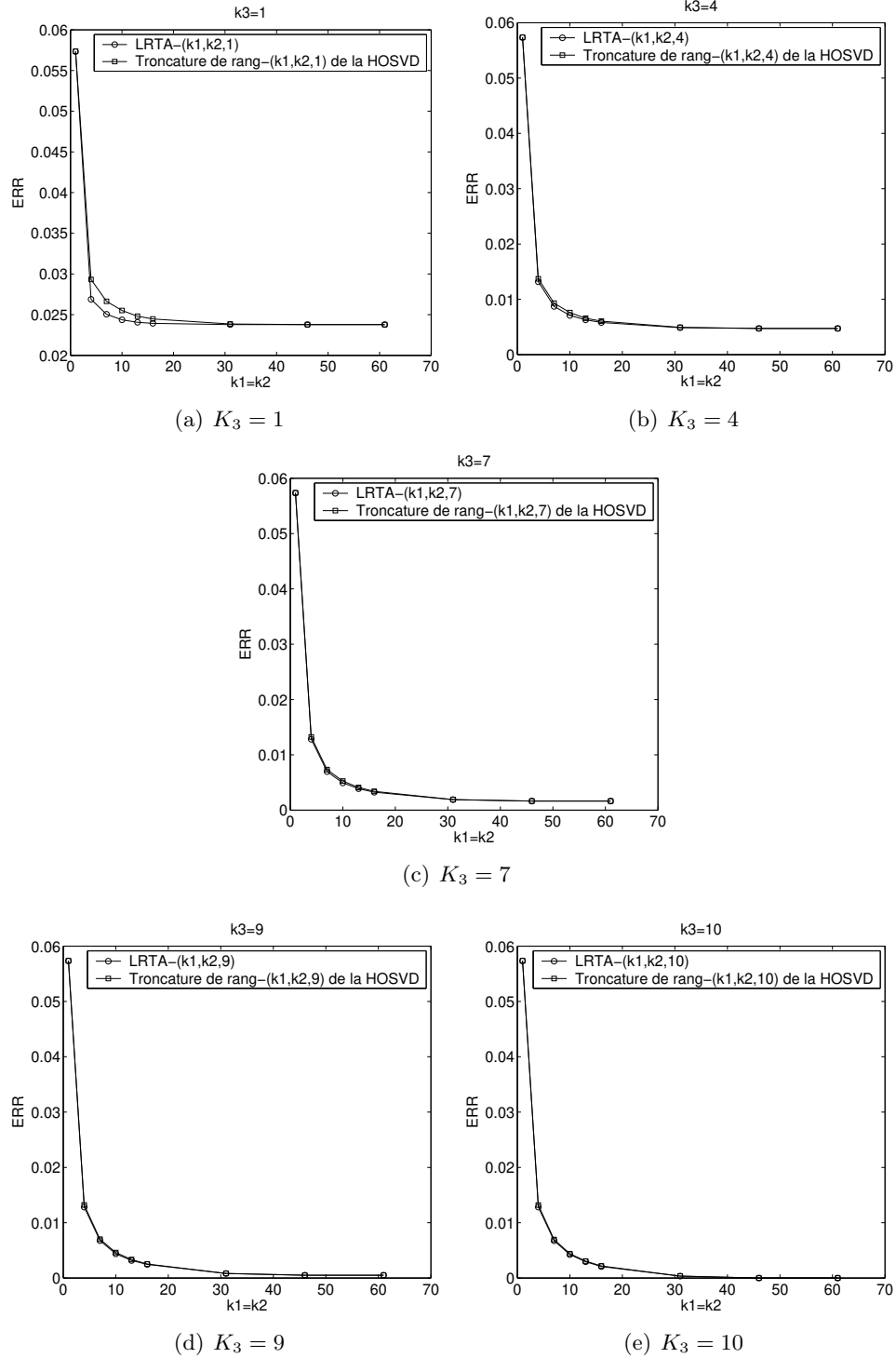


Figure 2.31 — Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.

2.4.2.1 Symétrie des surfaces $\text{ERR}(K_1, K_2, K_3)$

De même que dans le cas des images en couleur, nous obtenons les mêmes résultats concernant la symétrie des surfaces $\text{ERR}(K_1, K_2, K_3)$ obtenues pour K_1 et K_2 variables et K_3 fixé, données par la $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$ et la $\text{LRTA}(K, K, K_3)$ (cf. Figures 2.27 et 2.29 pour la Séquence3, Figure A.7 pour la Séquence1 et Figure A.10 pour la Séquence2).

Ainsi, comme dans le cas des images en couleur, pour une ERR donnée et un paramètre K_3 fixé, quels que soient les paramètres K_1 et K_2 utilisés dans la $\text{LRTA}(K_1, K_2, K_3)$ et la $\text{HOSVD}(K_1, K_2, K_3)$ d'une séquence d'image en niveaux de gris, les résultats obtenus sont identiques à ceux obtenus lorsque les paramètres K_1 et K_2 sont égaux à $\min(K_1, K_2)$.

Ce résultat peut s'expliquer, de nouveau, en analysant la base du sous-espaces signal de chaque trame. En effet, dans le cas des séquences Séquence1 et Séquence2, malgré que l'objet (carré) ait une position spatiale différente sur chaque trame, la dimension du sous-espace signal de chaque trame est identique car la morphologie de l'objet, et son orientation dans la trame ne varie pas d'une trame à l'autre. En revanche, du fait de la position différente de l'objet sur chaque trame, les vecteurs de base du sous-espace signal pourront être modifiés d'une trame à l'autre, en fonction de la position horizontale et verticale de l'objet. Cependant, comme dans le cas des images en couleur, le rang de l'ensemble des vecteurs colonnes est égal au rang de l'ensemble des vecteurs lignes de toutes les trames. Ceci explique que $K_1 = K_2 = K$. La valeur de K est égale au nombre de vecteurs colonnes (ou de vecteurs lignes) libres. Elle est encore généralement supérieure au rang de chaque trame.

Dans le cas de la Séquence3, la position spatiale de l'objet (le disque) ne varie pas, mais son orientation par rapport aux lignes et aux colonnes diffère d'une trame à l'autre. Le rang de chaque trame varie, cette fois-ci, en fonction de l'orientation de l'objet, cependant, le rang de l'ensemble des vecteurs colonnes est égal au rang de l'ensemble des vecteurs lignes de toutes les trames, ce qui explique, à nouveau, que $K_1 = K_2$.

Dans la suite, nous ne considérerons plus que le cas où $K_1 = K_2 = K$.

2.4.2.2 Équivalence des résultats concernant les approximations par $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$ et par $\text{LRTA}(K, K, K_3)$ d'une séquence

De même que dans le cas des images en couleur, les courbes de la Figure 2.31 correspondant à la Séquence3 (et les courbes des Figures A.9 et A.12 correspondant à la Séquence1 et à la Séquence2), montrent que pour un rang K suffisamment grand, l'ERR donnée par la $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$ est identique à celle donnée par $\text{LRTA}(K, K, K_3)$. Nous pouvons, en effet, vérifier que les trames données par $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$ et par $\text{LRTA}(K, K, K_3)$ sont identiques pour différentes valeurs de K et K_3 (cf. Figures 2.28 et 2.30).

Par conséquent, nous pouvons considérer, à nouveau, que, pour les exemples traités, l'algorithme TUCKALS3 nécessaire à la détermination de la $\text{LRTA}(K, K, K_3)$ n'apporte pas d'amélioration à la reconstruction des séquences d'images en niveaux de gris par rapport à une simple $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$ du tenseur de données. Pour des raisons de gain en temps de calcul, nous utiliserons donc la $\text{HOSVD}(K, K, K_3)$.

2.4.3 Lien entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ associés à une ERR donnée et les positions de l'objet dans une séquence

Nous proposons maintenant d'étudier dans quelle mesure les différentes positions des objets d'une séquence d'images en niveaux de gris influencent la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné.

Dans ces approximations, comme dans le cas des images en couleur, les rangs $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$ sont associés à la représentation spatiale de chaque trame. Le rang $\hat{K}_3$ est lié à l'évolution temporelle de la scène filmée. Dans la suite, $\hat{K}_3$ est appelé « nombre de composantes temporelles » associé au sous-espace signal 3-modal d'une séquence.

2.4.3.1 Séquence1 et Séquence2- Mouvement de translation horizontale et diagonale de l'objet

Les courbes d'évolution de l'ERR(K, K, K_3) en fonction de K , pour K_3 fixé, correspondant à la HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur $\mathcal{X}$ associé à la Séquence1 et à la Séquence2, montrent que l'ERR(K, K, K_3) devient inférieure à un seuil $\xi = 10^{-6}$ à partir de $K = K_3 = 10$ (cf. Figure A.7(f) pour la Séquence1 et A.10(f) pour la Séquence2).

Nous pouvons d'autre part vérifier (sur les Figures A.8 pour la Séquence1 et A.9 pour la Séquence2) que les trames de la séquence résultant de la HOSVD- $(10,10,10)$ des séquences initiales ne présentent plus aucun artéfacts ce qui n'est pas le cas de celles résultant de la HOSVD- (K, K, K_3) pour K et $K_3 < 10$.

En considérant le fait que les ERR données par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et par LRTA- (K_1, K_2, K_3) sont sensiblement identiques (cf. Figures A.9 et A.9), nous pouvons conclure que les rangs n -modaux de la Séquence1 et de la Séquence2 correspondant à une $ERR < 10^{-6}$ sont : $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) = (10, 10, 10)$.

2.4.3.2 Séquence 3 - Mouvement de rotation de l'objet

Considérons maintenant la Séquence3 étudiée dans [47]. Sur la Figure 2.27(f), les courbes d'évolution de l'ERR(K, K, K_3) en fonction de K , pour K_3 fixé, correspondant à la HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur $\mathcal{X}$ associé à la Séquence3, montrent que l'ERR(K, K, K_3) devient inférieure à un seuil $\xi = 10^{-6}$ à partir de $K = 31$, et pour $K_3 = 10$.

La Figure 2.28, montre que les trames de la séquence résultant de la HOSVD- $(31,31,10)$ de la Séquence3, ne présentent plus aucun artéfact, ce qui n'est pas le cas de celles résultant de la HOSVD- (K, K, K_3) , pour $K < 31$ et $K_3 < 10$. Les rangs n -modaux de la Séquence3 (correspondant à une $ERR < 10^{-6}$) peuvent donc être estimés à $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) = (31, 31, 10)$.

Les valeurs de l'estimation des rangs n -modaux pour ces trois séquence, sont regroupés dans le tableau 2.2.

rangs	séquences ERR < 10^{-6}		
	Séquence1	Séquence2	Séquence3
$\widehat{K}_1$	10	10	31
$\widehat{K}_2$	10	10	31
$\widehat{K}_3$	10	10	10
Figure	A.7	A.10	2.27

Tableau 2.2 — Rangs des tenseurs associés aux séquences étudiées correspondants à une ERR < 10^{-6} .

2.4.3.3 Conclusion de la section

Pour les trois séquences considérées, pour obtenir une séquence approximée sans artéfacts, il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des composantes 3-modales.

2.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence des rangs n -modaux sur le contenu des images approximées.

Nous avons, pour cela, étudié l'influence des rangs n -modaux K_1 , K_2 et K_3 dans l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris, grace au critère de l'ERR.

En étudiant l'influence des rangs n -modaux sur l'ERR des images en couleur et des séquences d'images en niveaux de gris considérées, nous avons, tout d'abord, dégagé les principales propriétés suivantes :

1. Quelle que soient les images en couleur ou les séquences d'images en niveaux de gris considérées, la symétrie des surfaces $\text{ERR}(K_1, K_2, K_3)$, obtenues pour K_3 fixé, implique qu'une approximation par $\text{HOSVD}(K_1, K_2, K_3)$ ou par $\text{LRTA}(K_1, K_2, K_3)$ peut s'effectuer en choisissant des rangs n -modaux $K_1 = K_2 = K$.
2. Pour l'ensemble des images en couleur et des séquences d'images en niveaux de gris traitées, les approximations par $\text{HOSVD}(K_1, K_2, K_3)$ ou par $\text{LRTA}(K_1, K_2, K_3)$ aboutissent sensiblement aux mêmes erreurs de reconstruction relatives ainsi qu'aux mêmes résultats visuels. Par conséquent, par soucis de gain en temps de calcul, nous utiliserons la $\text{HOSVD}(K_1, K_2, K_3)$.

Ces propriétés ayant été établies, nous avons ensuite déterminé dans quelle mesure le contenu d'une image en couleur ou d'une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur des rangs n -modaux $\widehat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par $\text{LRTA}(K_1, K_2, K_3)$ ou par $\text{HOSVD}(K_1, K_2, K_3)$ est inférieure à un seuil donné. Les principales conclusions à retenir de cette étude sont les suivantes :

1. Les rangs 1-modaux et 2-modaux sont d'autant plus faibles que la structure spatiale d'une image (i.e. les contours, et les zones définissant les objets contenus dans l'image) est verticale ou horizontale. Pour atteindre de faibles dimensions il serait judicieux de réarranger le contenu de l'image suivant le parcours de Peano.

2. Lors de l'approximation d'une séquence d'images en niveaux de gris par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) ou par LRTA- (K_1, K_2, K_3) , les mouvements de translation ou de rotation d'un objet simple ne peuvent être décrits, sans perte d'information, qu'en considérant l'ensemble des composantes temporelles.

Dans le chapitre suivant, nous proposons de comparer les résultats obtenus dans ce chapitre (concernant notamment l'estimation des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et leur lien avec le contenu d'une image en couleur ou le mouvement dans une séquence), avec ceux obtenus par la décomposition PARAFAC/CANDECOMP employée dans les études [47, 92] qui réalisent la décomposition, et l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris.

Comparaison de la
PACA- K_{PACA} et de la
HOSVD- (K, K, K_3) dans
l'approximation d'images
en couleur et de séquences
d'images en niveaux de
gris

LE but de ce chapitre est de mettre en évidence les différences qui existent entre les différentes méthodes réalisant l'ACP multimodale. Ces méthodes sont représentées par la décomposition de TUCKER3 et la décomposition PARAFAC/CANDECOMP (PACA), détaillées au chapitre 1.

Pour cela, nous proposons d'effectuer la comparaison entre les méthodes d'approximation basées sur la décomposition de TUCKER3, données par la LRTA- (K, K, K_3) et par la HOSVD- (K, K, K_3) , et la méthode d'approximation basée sur la décomposition PACA employée dans les études [47, 92]. Cette approximation tensorielle effectue l'approximation de rang- K_{PACA} inférieur du tenseur de données MM, et est notée ici par « PACA- K_{PACA} ».

Pour effectuer cette comparaison, nous adoptons le même protocole expérimental que dans le chapitre précédent :

1. Les données MM sur lesquelles s'appuie la comparaison des méthodes d'approximation tensorielles sont constituées par les images en couleur et les séquences d'images en niveaux de gris présentées à la section 2.3.1.
2. Le critère utilisé pour effectuer la comparaison des méthodes d'approximation tensorielles est l'Erreur de Reconstruction Relative (ERR). De même que pour le rang n -modal $\hat{K}_n$, l'ERR nous permet de définir le rang $\hat{K}_{PACA}$ d'une image ou d'une séquence.

D'autre part, dans le chapitre précédent, nous avons constaté que la LRTA- (K, K, K_3) et la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) donnent sensiblement les mêmes résultats en ce qui concerne (i) l'évolution des courbes de l'ERR- (K, K, K_3) en fonction de K , à K_3 fixé, et (ii) l'estimation des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ des images et séquences considérées. Par conséquent nous pouvons comparer l'approximation par PACA- K_{PACA} uniquement à la HOSVD- (K, K, K_3) sans perte de généralité par rapport à la LRTA- (K, K, K_3) .

Nous organisons ce chapitre de la façon suivante. Nous effectuons dans la section 3.1 un bref état de l'art des études [47, 92] qui utilisent une approximation tensorielle basée sur la décomposition PACA. Dans la section 3.2 nous présentons la méthode d'approximation des données MM par la PACA- K_{PACA} , et définissons les ERR associées à cette approximation. Enfin, dans les sections 3.3 et 3.4, nous comparons les méthodes d'approximation par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} respectivement sur les images en couleur et sur les séquences d'images en niveaux de gris traitées dans le chapitre précédent. Nous déterminons à ce titre, dans quelle mesure l'information contenue dans une image en couleur ou une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur du rang $\hat{K}_{PACA}$ pour lesquels l'ERR obtenue par PACA- K_{PACA} est inférieur à un seuil donné. Nous étudions les relations possibles qui existent entre les rangs n -modaux $\hat{K}$ et $\hat{K}_3$ et le rang $\hat{K}_{PACA}$. Nous proposons enfin dans la section 3.5 une brève étude sur la charge de calcul impliquée par chacune des méthodes.

3.1 État de l'art des méthodes d'approximation des données MM basées sur la décomposition PARAFAC/CANDECOMP

Deux études de décomposition, et de reconstruction basées sur la décomposition PACA ont récemment été proposées [47, 92].

3.1.1 Approximation par PACA d'une séquence d'images en niveaux de gris

La première étude [47] repose sur l'approximation de rang- K inférieur d'un tenseur d'ordre 3. Dans cette étude, les problèmes d'optimisation non-linéaire rencontrés dans la décomposition PACA sont résolus en utilisant les méthodes de convergence par gradient, appliquées à l'algorithme ALS classique qui permet d'obtenir l'approximation de rang- K d'un tenseur [37, 71, 72, 73]. Une application de cet algorithme pour la compression d'une séquence d'images en niveaux de gris non bruitées est proposée. Cette « compression tensorielle » étend les méthodes algébriques élaborées dans le cas bidimensionnel [61, 70].

3.1.2 Décomposition par PACA d'une image en couleur et contrainte de positivité

La seconde méthode [92] propose une méthode de « factorisation tensorielle positive » qui constitue en d'autres termes, une décomposition PACA avec une contrainte de positivité sur les données. Cette méthode est utilisée pour la reconstruction et l'extraction de composantes caractéristiques d'images en couleur. En effet, les données contenues dans le tenseur modélisant une image en couleur sont toujours positives.

Selon [92], la positivité des données peut rendre impossible l'interprétation des vecteurs singuliers n -modaux issus d'une décomposition ayant des composantes négatives. Par exemple, dans le cas des images en niveaux de gris bidimensionnelles, les vecteurs singuliers associés aux valeurs propres les plus importantes, sont constitués de composantes positives. Par conséquent, si ces vecteurs singuliers sont composés d'un faible nombre de composantes nulles, alors, la contrainte d'orthogonalité imposée par la SVD implique que certains vecteurs singuliers comportent des composantes négatives. Pour contourner ce problème, les études [41, 62] ont proposé d'abandonner la contrainte d'orthogonalité, imposée par construction dans la SVD, pour une contrainte de positivité en accord avec la nature des données.

En se basant sur les études [41, 62], la décomposition PACA de l'étude [92] est obtenue grâce à un algorithme itératif, basé sur les moindres carrés alternés, dont plusieurs règles de mise à jour des données sont établies de façon à respecter les contraintes de positivité.

Notons qu'un algorithme qui permet d'obtenir la décomposition PACA avec contrainte de positivité sur les vecteurs singuliers n -modaux a aussi été proposé dans [6], mais n'est pas présenté dans ce manuscrit.

Dans les sections suivantes, nous poursuivons les investigations sur la reconstruction et l'approximation des signaux MM non bruités par des méthodes algébriques.

En s'inspirant des études existantes, et compte tenu du fait qu'il n'existe, pour l'instant, aucun algorithme permettant d'aboutir à une décomposition PACA orthogonale [33], nous proposons de faire usage, comme dans [92], d'une décomposition PACA des données avec une contrainte de positivité, de façon à respecter la nature positive des images en couleur et des séquences d'images en niveaux de gris.

Nous focalisons d'autre part notre étude sur la comparaison des différentes méthodes tensorielles (HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA}) pour l'approximation, i.e. la compression

avec perte d'information, d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris.

3.2 Protocole expérimental et erreur de reconstruction relative

Considérons un signal MM quelconque parmi l'ensemble des données MM présentées au chapitre précédent (images en couleur ou séquences d'images en niveaux de gris des Figures 2.7, 2.24, 2.25 et 2.26), modélisé par le tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$.

3.2.1 Méthode d'approximation par PACA- K_{PACA}

L'approximation PACA- K_{PACA} du tenseur $\mathcal{X}$ donne le tenseur $\hat{\mathcal{X}}_{PACA}$ qui s'exprime par l'expression :

$$\hat{\mathcal{X}}_{PACA} = \sum_{i=1}^{K_{PACA}} \mathcal{X}_i, \quad (3.1)$$

dans laquelle $\forall i = 1, \dots, K_{PACA}$, $\mathcal{X}_i$ est le tenseur de rang un défini par :

$$\mathcal{X}_i = \mathbf{u}_i^{(1)} \circ \mathbf{u}_i^{(2)} \circ \mathbf{u}_i^{(3)}, \quad (3.2)$$

où $\forall n = 1, 2, 3$, et $\forall i = 1, \dots, K_{PACA}$, $\mathbf{u}_i^{(n)}$ est un vecteur de base du sous-espace signal n -modal obtenu après convergence de l'algorithme PARAFAC ALS [6], présenté dans le chapitre 1.

3.2.2 Critère de comparaison : l'ERR

L'ERR définie, à la relation (2.5) du chapitre précédent, pour l'approximation par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et par LRTA- (K_1, K_2, K_3) , peut être définie de façon identique pour l'approximation PACA- K_{PACA} . L'écart qui existe entre le tenseur approximé $\hat{\mathcal{X}}_{PACA}$ et le tenseur initial $\mathcal{X}$ est donné par :

$$ERR(K_{PACA}) = \frac{\|\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}_{PACA}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2}. \quad (3.3)$$

La comparaison des méthodes d'approximation par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} peut être effectuée, par exemple, grâce à l'étude des courbes d'évolution de l'ERR(K, K, K_3), à K_3 fixé, et de l'ERR(K_{PACA}) en fonction des paramètres K et K_{PACA} .

3.2.3 Définition du rang $\hat{K}_{PACA}$ d'un tenseur de données MM associé à un seuil sur l'ERR

De même qu'à la section 2.2.3, dans laquelle nous avons utilisé l'ERR pour définir les rangs n -modaux $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ et $\hat{K}_3$ d'un tenseur $\mathcal{X}$ de données MM, nous pouvons définir le rang $\hat{K}_{PACA}$ de $\mathcal{X}$, comme étant la valeur de ce paramètre tel que l'ERR résultant de la PACA- K_{PACA} de $\mathcal{X}$ vérifie :

$$ERR(K_{PACA}) < \xi, \quad (3.4)$$

dans lequel ξ est un seuil fixé *a priori*. De même que dans le chapitre précédent, nous pourrions alors étudier dans quelle mesure le contenu d'une image en couleur ou d'une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur du rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$.

3.3 Comparaison des approximations par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} d'images en couleur

Dans cette section, nous présentons les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} , relatives à l'approximation PACA- K_{PACA} et des images en couleur Lena, Sailboat et Mondrian1, ainsi que les images approximées correspondant à plusieurs rangs K_{PACA} . Cette décomposition est effectuée en prenant en compte la contrainte de positivité sur les vecteurs singuliers n -modaux.

Pour chacun des exemples choisis, la courbe d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} est comparée à celle obtenue par HOSVD- (K, K, K_3) . L'ensemble de ces résultats sont représentés respectivement sur les Figures 3.1 et 3.2 pour Lena, sur les Figures 3.3 et 3.4 pour Sailboat, et sur les Figures 3.5 et 3.6 pour Mondrian1.

Les remarques déduites de ces simulations concernent les points suivants :

1. La comparaison des courbes d'évolution l'ERR en fonction des rangs respectifs, relatives aux approximations par HOSVD- (K, K, K_3) , PACA- K_{PACA} et l'interprétation de la PACA- K_{PACA} en terme de prise en compte des composantes dominantes de couleur.
2. Les relations qui existent entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rangs $\hat{K}_{\text{PACA}}$.
3. La relation qui existe entre le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ et la structure spatiale d'une image.

Ces remarques sont consignées dans les sous-sections suivantes.

3.3.1 Prise en compte des composantes de couleur dominantes par la PACA- K_{PACA}

L'approximation PACA- K_{PACA} prend en compte, par construction, toutes les teintes dominantes de l'image initiale.

Nous pouvons vérifier cette propriété par la comparaison des courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} et K , relatives aux approximations tensorielles PACA- K_{PACA} et HOSVD- $(K, K, 3)$, pour K_3 fixé.

En effet, comme le montrent les Figures 3.1(c), 3.5(c) relatives respectivement aux images Lena et Mondrian1, les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} et K , relatives aux approximations tensorielles PACA- K_{PACA} et HOSVD- $(K, K, 3)$ sont confondues. Ceci montre, conformément aux résultats du chapitre 2, que les images Lena et Mondrian1 sont constituées de trois composantes de couleur dominantes prises en compte par la PACA- K_{PACA} .

Cette propriété est encore vérifiée sur des images constituées de deux teintes de couleur dominantes telles que l'image Sailboat. En effet, pour cette image, les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} , associées aux approximations PACA- K_{PACA} et HOSVD- $(K, K, 2)$, sont confondues (cf. Figure 3.3(b)). Par conséquent, les deux teintes dominantes de l'image sont prises par compte dans l'approximation PACA- K_{PACA} .

Ainsi, dans cadre de l'approximation des images en couleur, l'ERR obtenue dans l'approximation PACA- K_{PACA} de l'image initiale ne concerne que l'approximation du contenu spatial de l'image.

3.3.2 Relations entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{PACA}$

Nous pouvons effectuer la comparaison des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et du rang $\hat{K}_{PACA}$ pour les images en couleur traitées. D'après les Figures 3.1(c), 3.3(c), 3.5(c), pour les trois images considérées, étant donné que :

1. la courbe représentant l'évolution de l'ERR($K, K, 3$) associée à la HOSVD- $(K, K, 3)$ en fonction de K ,
2. la courbe représentant l'évolution de l'ERR(K_{PACA}) associée à la PACA- K_{PACA} en fonction de K_{PACA} ,

sont confondues, le rang $\hat{K}_{PACA}$ du tenseur $\mathcal{X}$ associé à chacune des trois images, et les rangs 1-modaux et 2-modaux (de valeur $\hat{K}$) correspondant sont égaux. Dans le cas de ces images en couleur étudiées, nous avons donc :

$$\hat{K}_{PACA} = \sup_{n \in \{1, 2, 3\}} (\hat{K}_n) \quad (3.5)$$

Ce résultat est bien conforme aux propriétés des rangs des tenseurs énoncées à la section 1.3.

Nous verrons que, dans le cas des séquences d'images en niveaux de gris (pour lesquelles la dimension 3-modale I_3 est généralement supérieure à l'ordre $N = 3$ du tenseur $\mathcal{X}$ associé à une séquence), le rang K_{PACA} peut être supérieur à la borne supérieure des rangs n -modaux K_n , $\forall n = 1, 2, 3$.

Nous résumons, d'autre part, dans le tableau 3.1, les valeurs des rangs $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{PACA}$ trouvés pour les images Lena, Sailboat et Mondrian1, et pour un seuil sur l'ERR fixé à $\xi = 10^{-3}$.

3.3.3 Relation entre le rang $\hat{K}_{PACA}$ et la structure spatiale d'une image

Nous pouvons apporter les mêmes conclusions qu'à la section 2.3.3.1 (concernant la relation entre le rang 1-modal et 2-modal, et la structure spatiale d'une image en couleur) à savoir : le rang $\hat{K}_{PACA}$ d'une image en couleur est d'autant plus faible que la structure spatiale (i.e. les contours, et les zones définissant les objets contenus dans l'image) est verticale ou horizontale, c'est-à-dire parallèle aux lignes ou aux colonnes.

Ceci se vérifie en comparant les courbes d'évolution de l'ERR en fonction de K_{PACA} , relative à l'image Lena (dont la structure spatiale ne présente aucune dominante horizontale ou verticale) et relative à l'image Mondrian1 (dont la structure spatiale est nettement horizontale et verticale) :

1. Dans le cas de Lena (cf. Figure 3.1), nous pouvons remarquer que l'ERR est inférieure à $\xi = 10^{-3}$ à partir d'un rang K_{PACA} égal à 45. Le rang $\hat{K}_{PACA}$ du tenseur associé à Lena peut donc être estimé à 45. L'image approximée correspondante est présentée sur la Figure 3.2(f).
2. En revanche, dans le cas de Mondrian1 (cf. Figure 3.5), l'ERR devient inférieure à $\xi = 10^{-3}$ à partir d'un rang K égal à 13. Le rang $\hat{K}_{PACA}$ du tenseur associé à Mondrian1 peut

donc être estimé à 13. L'image approximée correspondante est présentée sur la Figure 3.6(d).

Remarquons que, conformément aux remarques de la sous-section 3.3.2 précédente, le rang K_{PACA} et les rang 1-modaux et 2-modaux des images étudiées, sont identiques. Les valeurs d'estimation de ces rangs, pour chacune des images étudiées, sont résumées dans le Tableau 3.1.

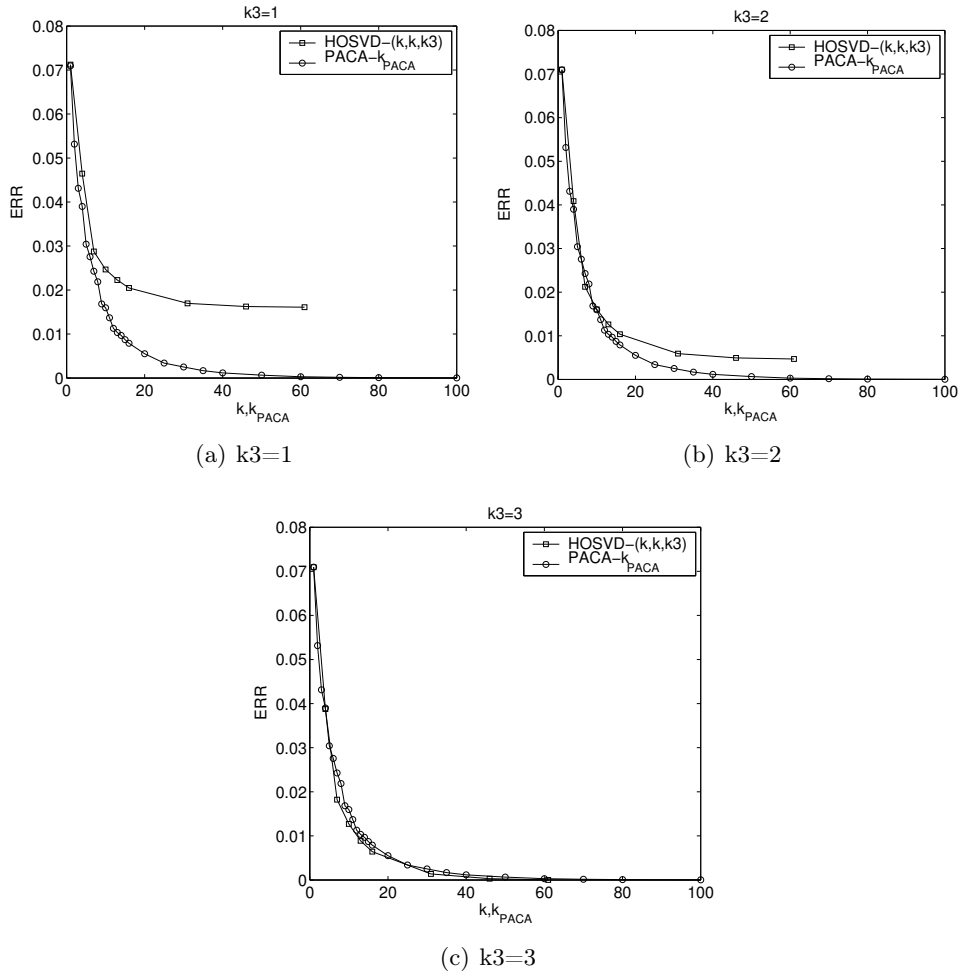


Figure 3.1 — Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".

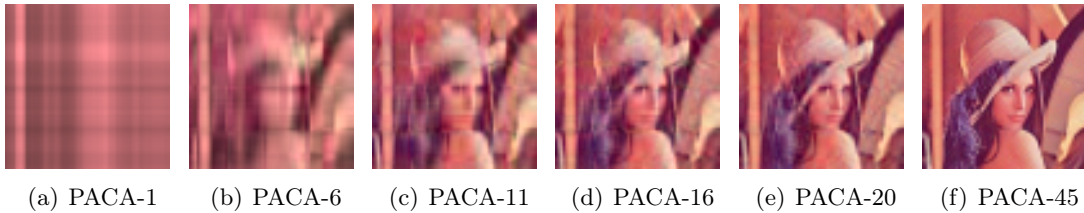


Figure 3.2 — Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".

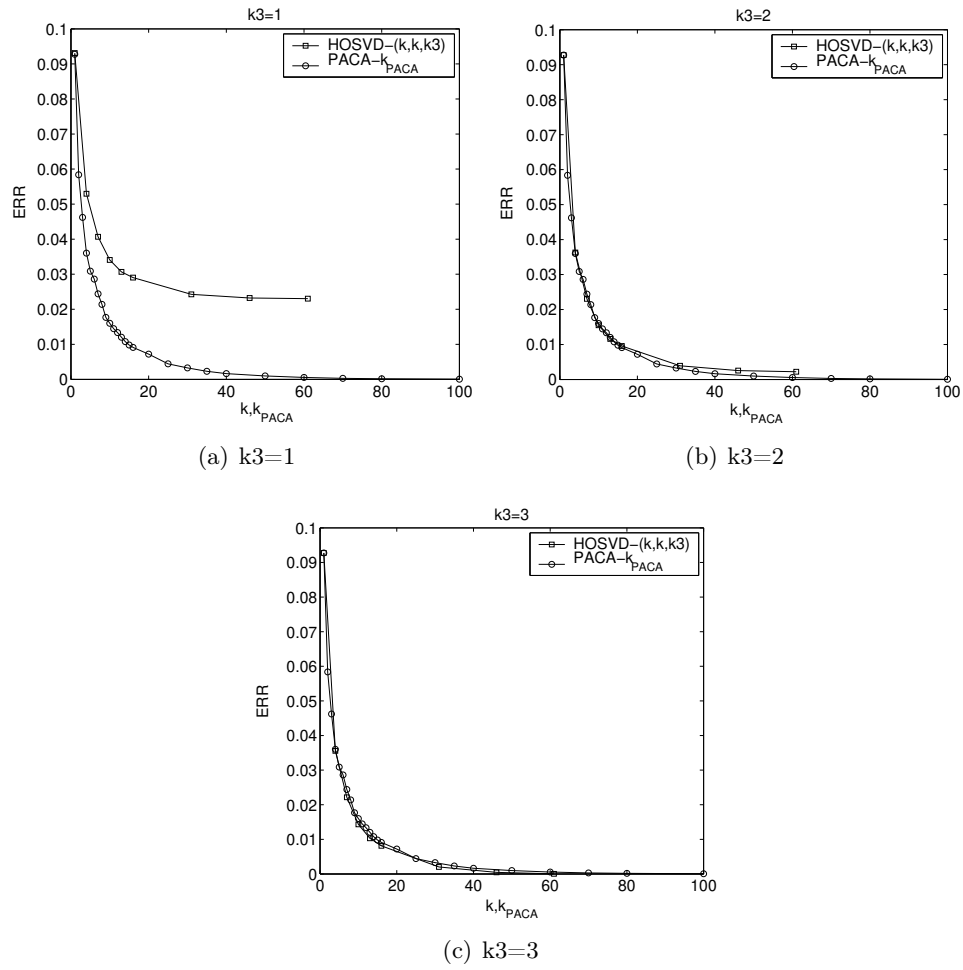


Figure 3.3 — Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".

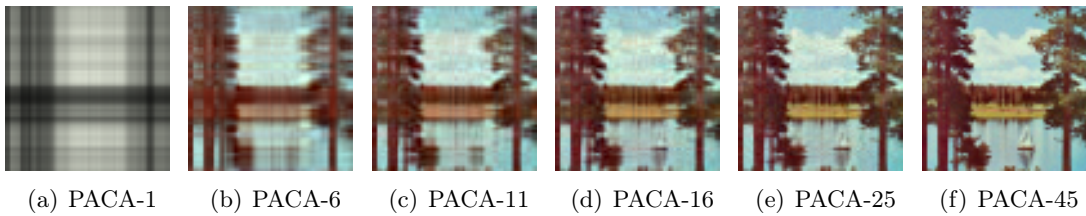


Figure 3.4 — Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".

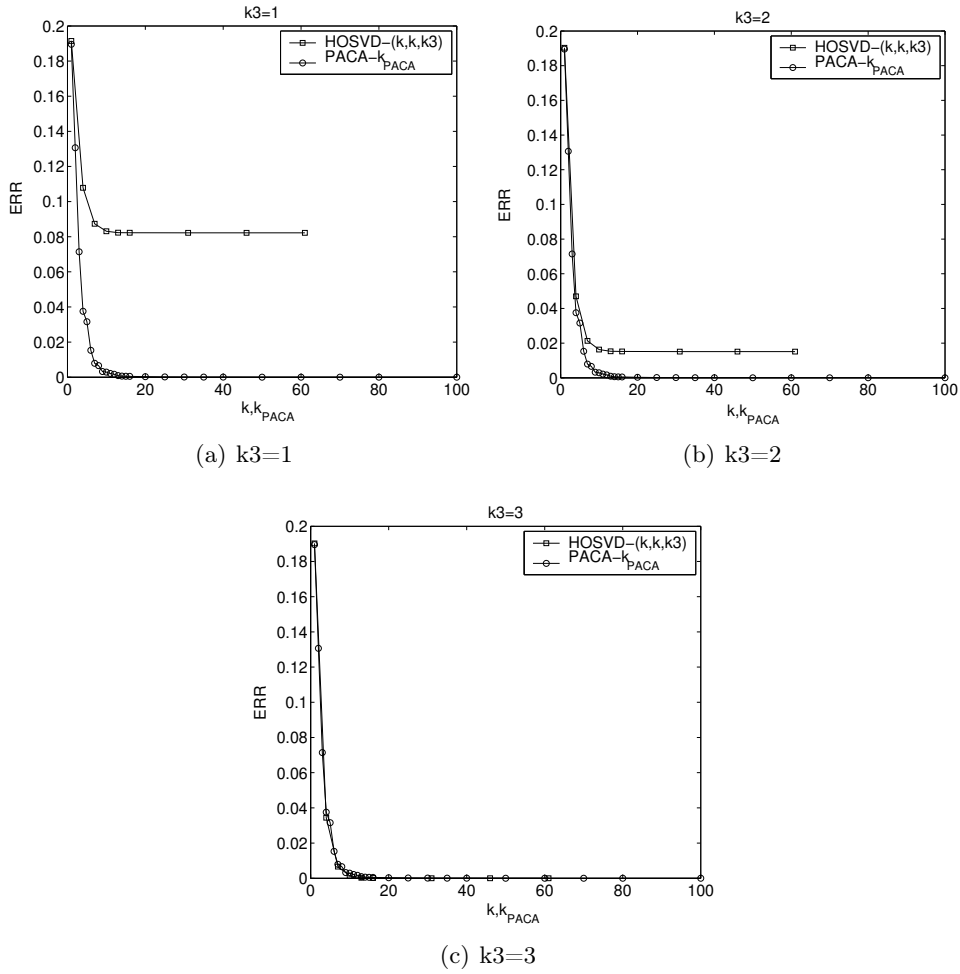


Figure 3.5 — Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondriaan1".

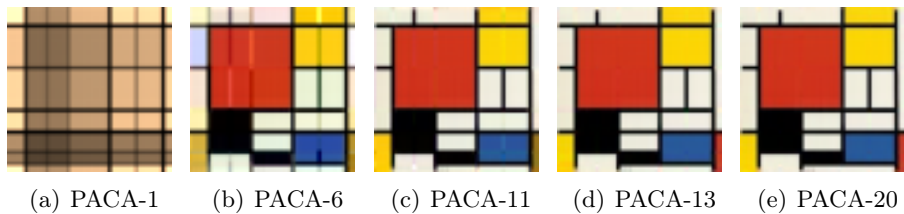


Figure 3.6 — Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondriaan1".

3.4 Comparaison des approximations par HOSVD- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} de séquences d'images en niveaux de gris

Dans cette sous-section, nous présentons les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} , relatives à l'approximation PACA- K_{PACA} des séquences d'images en niveaux de gris : Séquence1, Séquence2 et Séquence3, traitées dans le chapitre 2 précédent.

De même que dans le cas des images en couleur, la décomposition PACA des séquences est effectuée en prenant en compte la contrainte de positivité sur les vecteurs singuliers n -modaux.

Pour chacun des exemples considérés, la courbe d'évolution de l'ERR en fonction du rang K_{PACA} est comparée aux courbes obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) . L'ensemble de ces résultats sont représentés respectivement dans les Figures 3.7 et 3.8 pour la Séquence1, dans les Figures 3.9 et 3.10 pour la Séquence2 et dans les Figures 3.11 et 3.12 pour la Séquence3.

De même que pour les images en couleur, les remarques déduites de ces simulations concernent les points suivants :

1. La comparaison des courbes d'évolution de l'ERR en fonction des rangs respectifs, relatives aux approximations par HOSVD- (K, K, K_3) , PACA- K_{PACA} .
2. Les relations qui existent entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$.
3. L'estimation du rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ d'une séquence et le lien qui existe entre la valeur du rang estimée, et le mouvement des objets dans la séquence.

Ces remarques sont effectuées séparément pour chacune des séquences considérées, et sont présentées dans les sections suivantes.

3.4.1 Séquence1 - Mouvement de translation horizontale

3.4.1.1 Comparaison des ERR données par la PACA- K_{PACA} et la HOSVD- (K, K, K_3) pour la Séquence1

Sur la Figure 3.7, qui présente les courbes d'évolution de l'ERR en fonction des rangs respectifs, obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) et par PACA- K_{PACA} du tenseur associée à la Séquence1 (dont le mouvement implique seulement le 1-mode spatial), nous pouvons remarquer que :

1. les courbes représentant l'ERR(K_{PACA}) et l'ERR(K, K, K_3) sont confondues uniquement lorsque le rang 3-modal K_3 est égal au nombre de trames $I_3 = 10$ de la séquence :

$$\exists! K_3 = I_3 = 10 \text{ tel que } \forall K_{\text{PACA}} = K, \quad \text{ERR}(K_{\text{PACA}}) = \text{ERR}(K, K, K_3). \quad (3.6)$$

Pour cette séquence, les traitements donnés par PACA- K_{PACA} et par HOSVD- (K, K, K_3) , pour $K_3 = I_3 = 10$, peuvent donc être considérés comme équivalents du point de vue de l'ERR.

3.4.1.2 Relation entre les rangs $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{\text{PACA}}$ de la Séquence1

Comme dans le cas des images en couleur, la relation 3.6 nous permet de conclure que le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ et les rangs 1-modaux et 2-modaux correspondant sont égaux ($\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}$).

De plus, la relation suivante, entre les rangs $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{PACA}$, est vérifiée :

$$\hat{K}_{PACA} = \sup_{n \in \{1, 2, 3\}}(\hat{K}_n) . \quad (3.7)$$

3.4.1.3 Détermination du rang $\hat{K}$ de la Séquence1

D'autre part, l'ERR(K_{PACA}) devient inférieure à $\xi = 10^{-6}$ à partir du rang $K_{PACA} = 10$, nous pouvons donc considérer que le rang de la Séquence1 est $\hat{K}_{PACA} = 10$.

Nous pouvons en effet vérifier sur la Figure 3.8 que les trames de la séquence résultant de l'approximation PACA-10 du tenseur associé à la Séquence1 ne présentent plus aucun artéfact, ce qui n'est pas le cas, par exemple, de celles résultant de l'approximation PACA-7.

3.4.2 Séquence2 - Mouvement de translation diagonale

3.4.2.1 Comparaison des ERR données par la PACA- K_{PACA} et la HOSVD- (K, K, K_3) pour la Séquence2

La comparaison des courbes d'évolution de l'ERR en fonction des rangs K_{PACA} et K , relatives à la PACA- K_{PACA} et la HOSVD- (K, K, K_3) de la Séquence2, présente des résultats différents de ceux observés pour la Séquence1. En effet, ces courbes ne sont plus totalement confondues quelles que soient les valeurs de K_{PACA} et K , pour $K_3 = 10$. Nous pouvons remarquer sur les Figures 3.9(d) et 3.9(e), que ces deux courbes sont telles que :

$$\exists! K_3 = 10, \text{ tel que, } \forall K \text{ et } K_{PACA} \in [10, 20], \quad ERR(K_{PACA}) > ERR(K, K, K_3). \quad (3.8)$$

Nous pouvons remarquer aussi, qu'en dehors de l'intervalle $[10, 20]$, auquel appartiennent K et K_{PACA} , ces courbes sont confondues.

3.4.2.2 Relation entre les rangs $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{PACA}$ de la Séquence2

Les remarques du paragraphe précédent impliquent que le rang $\hat{K}_{PACA}$ est supérieur aux rangs n -modaux de la Séquence2 :

$$\hat{K}_{PACA} > \sup_{n \in \{1, 2, 3\}}(\hat{K}_n) . \quad (3.9)$$

3.4.2.3 Estimation du rang $\hat{K}$ de la Séquence2

Il est possible de vérifier la relation (3.9) en estimant, par exemple sur la Figure 3.9(e), les rangs n -modaux $\hat{K}_n$, et le rang $\hat{K}_{PACA}$ de la Séquence2, pour un seuil $\xi = 10^{-6}$ sur l'ERR. Les valeurs de ces rangs sont les suivantes :

1. $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) = (10, 10, 10)$,
2. et $\hat{K}_{PACA} = 15$.

rang	images ERR < 10^{-3}			séquences ERR < 10^{-6}		
	Lena	Sailboat	Mondriaan1	Séquence1	Séquence2	Séquence3
$\hat{K}_{PACA}$	45	45	13	10	15	100
Figure	3.1	3.4	3.5	3.7	3.9	3.11

Tableau 3.1 — Rang des tenseurs associés aux images et aux séquences étudiées correspondant respectivement à une $ERR < 10^{-3}$ et une $ERR < 10^{-6}$.

Ces résultats sont regroupés dans le Tableau 3.1.

D'autre part, nous pouvons vérifier, sur la Figure 2.25, que les trames de la séquence résultant de l'approximation PACA- K_{PACA} du tenseur associé à la Séquence2, ne présentent plus aucun artéfact à partir du rang $K_{PACA} = 15$.

3.4.2.4 Comparaison des rangs de la Séquence1 et de la Séquence2

Le fait que, contrairement à la Séquence1, le rang $\hat{K}_{PACA}$ soit supérieur à la borne supérieure des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ de la Séquence2 peut s'expliquer par la nature du mouvement de l'objet qui la compose. En effet, le mouvement relatif à la Séquence2 implique les deux n -modes spatiaux de façon linéaire, alors que le mouvement relatif à la Séquence1 implique seulement le 1-mode spatial.

3.4.3 Séquence3 - Mouvement de rotation

3.4.3.1 Comparaison des ERR données par la PACA- K_{PACA} et la HOSVD- (K, K, K_3) pour la Séquence3

Pour la Séquence3, la comparaison des courbes d'évolution de l'ERR en fonction des rangs K_{PACA} et K , relatives à la PACA- K_{PACA} et la HOSVD- (K, K, K_3) présente des résultats différents de ceux observés pour la Séquence1 et la Séquence2. En effet, ces courbes sont telles que :

$$\forall K_3 \geq 9 \text{ et } \forall K \text{ et } K_{PACA} \geq 5, \quad ERR(K_{PACA}) > ERR(K, K, K_3). \quad (3.10)$$

3.4.3.2 Relation entre les rangs tensoriels de la Séquence3

Comme dans le cas de la Séquence2, ceci implique que le rang $\hat{K}_{PACA}$ est supérieur aux rangs n -modaux $\hat{K}_n$ de la Séquence3 :

$$\hat{K}_{PACA} > \sup_{n \in \{1, 2, 3\}} (\hat{K}_n). \quad (3.11)$$

3.4.3.3 Estimation du rang $\hat{K}$ de la Séquence3

Les rangs n -modaux $\hat{K}_n$, et le rang $\hat{K}_{PACA}$ de la Séquence3, pour un seuil $\xi = 10^{-6}$ sur l'ERR, peuvent en effet être estimés à :

1. $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) = (31, 31, 10)$,

2. et $\hat{K}_{PACA} = 100$.

Ces résultats sont regroupés dans le Tableau 3.1.

Nous pouvons vérifier sur la Figure 2.25 que les trames de la séquence résultant de l'approximation PACA-100 du tenseur associé à la Séquence2 ne présentent plus aucun artéfact.

3.4.3.4 Comparaison des rangs de la Séquence2 et de la Séquence3

La comparaison des rangs $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{PACA}$ de la Séquence2 et de la Séquence3 amène aux constatations suivantes :

1. l'écart qui existe entre la borne supérieure des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{PACA}$ est encore plus marqué que celui observé pour la Séquence2.
2. D'autre part le rang $\hat{K}_{PACA}$ de la Séquence3 est supérieur à celui de la Séquence2. Ceci peut, de nouveau, s'expliquer par la nature différente du mouvement impliqué dans les deux séquences. En effet, la relation relative au mouvement entre les deux n -modes spatiaux de la Séquence2 est linéaire (translation uniforme) alors qu'elle est non-linéaire (rotation) dans le cas de la Séquence3.

Notons enfin que la relation entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{PACA}$ des trois séquences étudiées, est en accord avec les propriétés des rangs énoncés à la section 1.3.

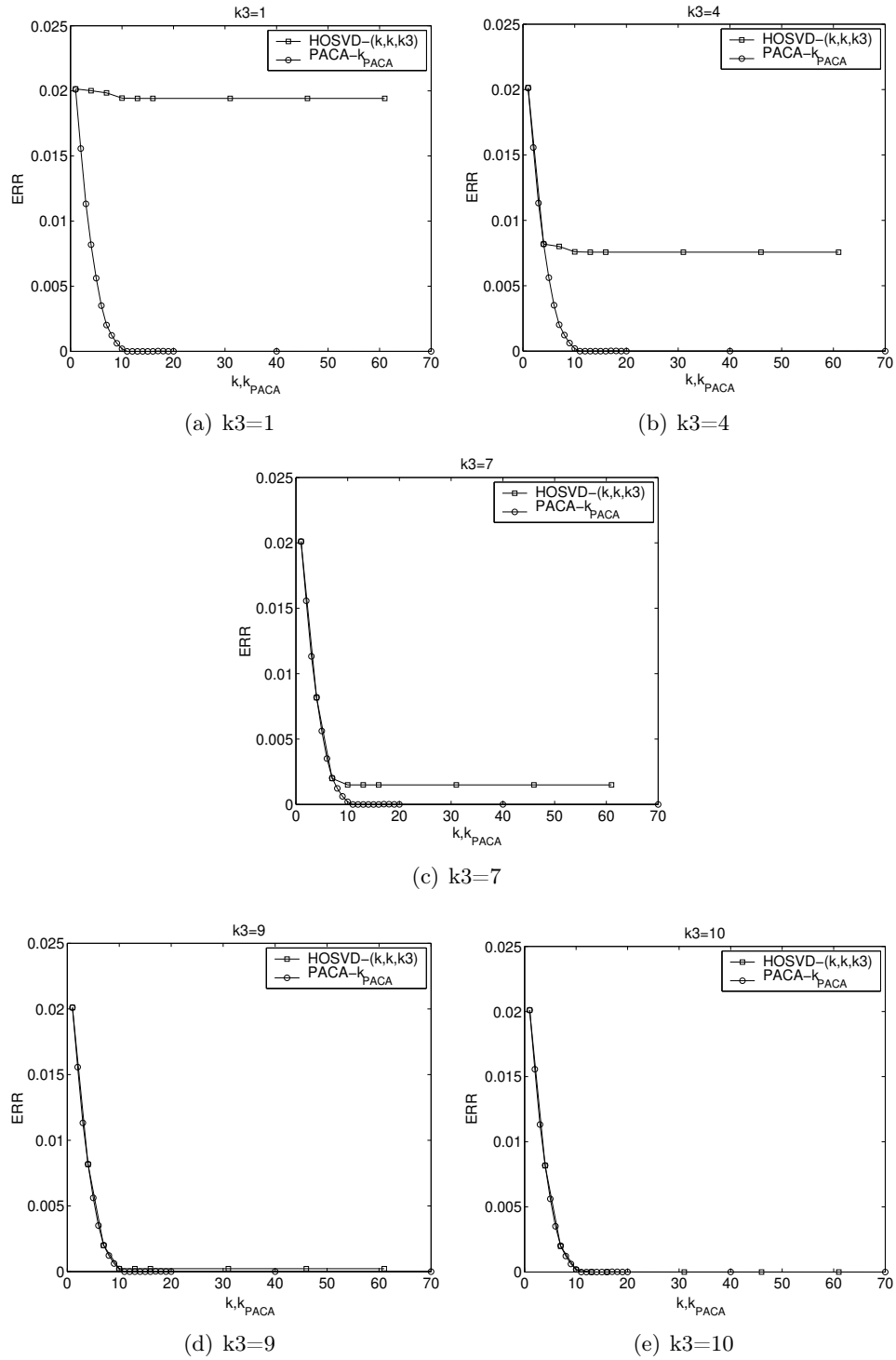


Figure 3.7 — Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.

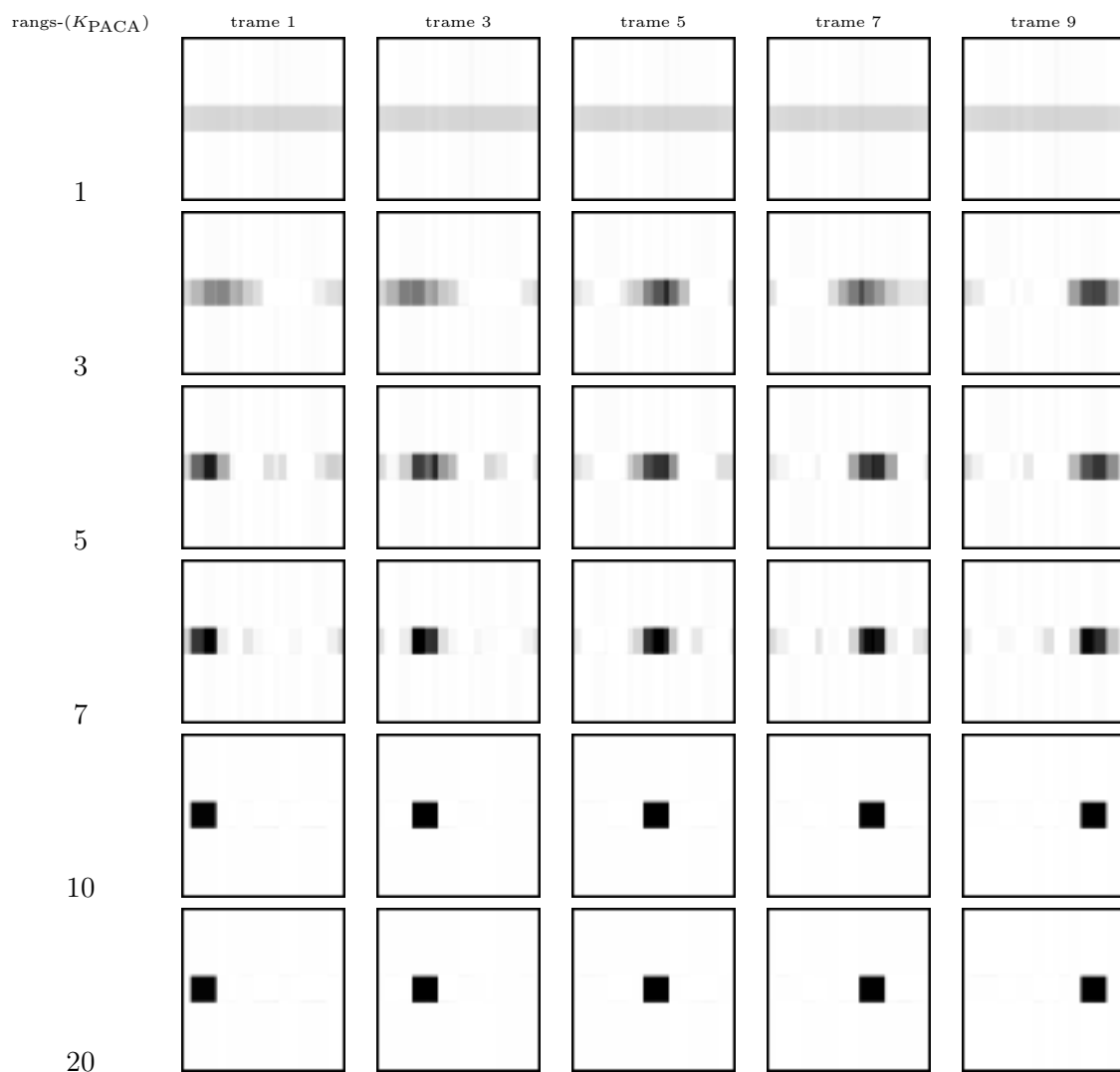


Figure 3.8 — Séquences résultant des approximations PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 1.

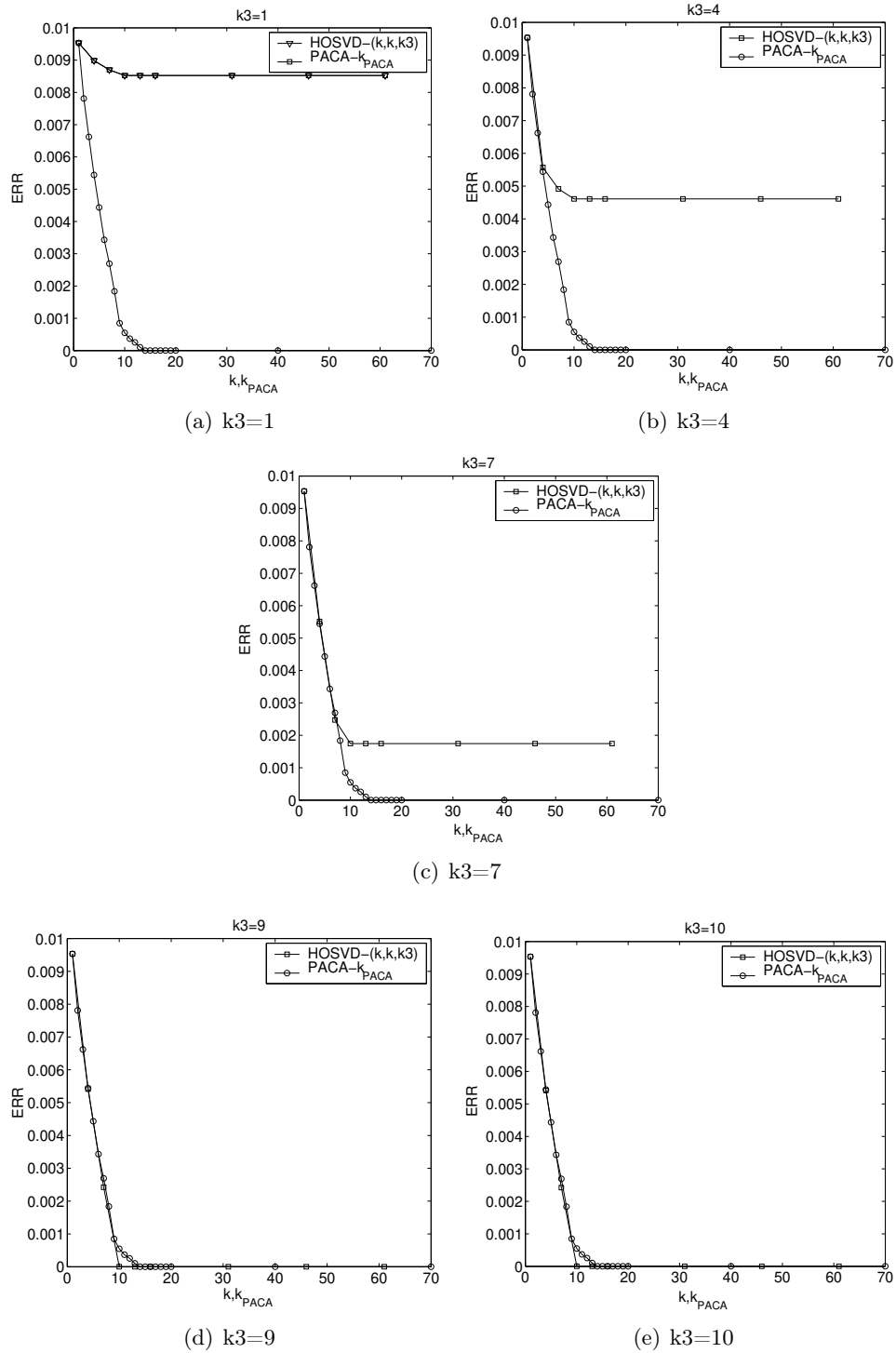


Figure 3.9 — Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.

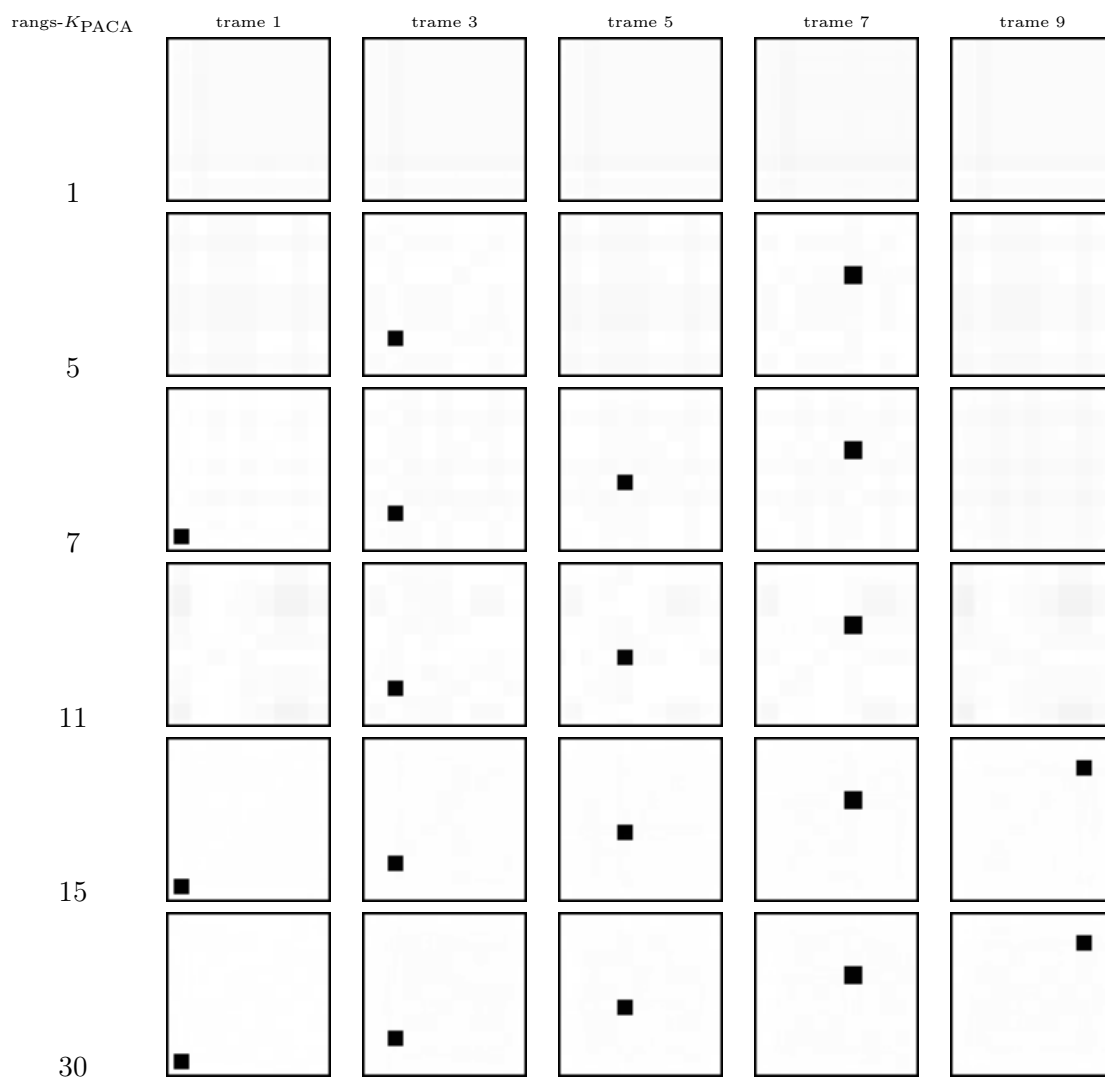


Figure 3.10 — Séquences résultant des approximations $PACA-K_{PACA}$ avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 2.

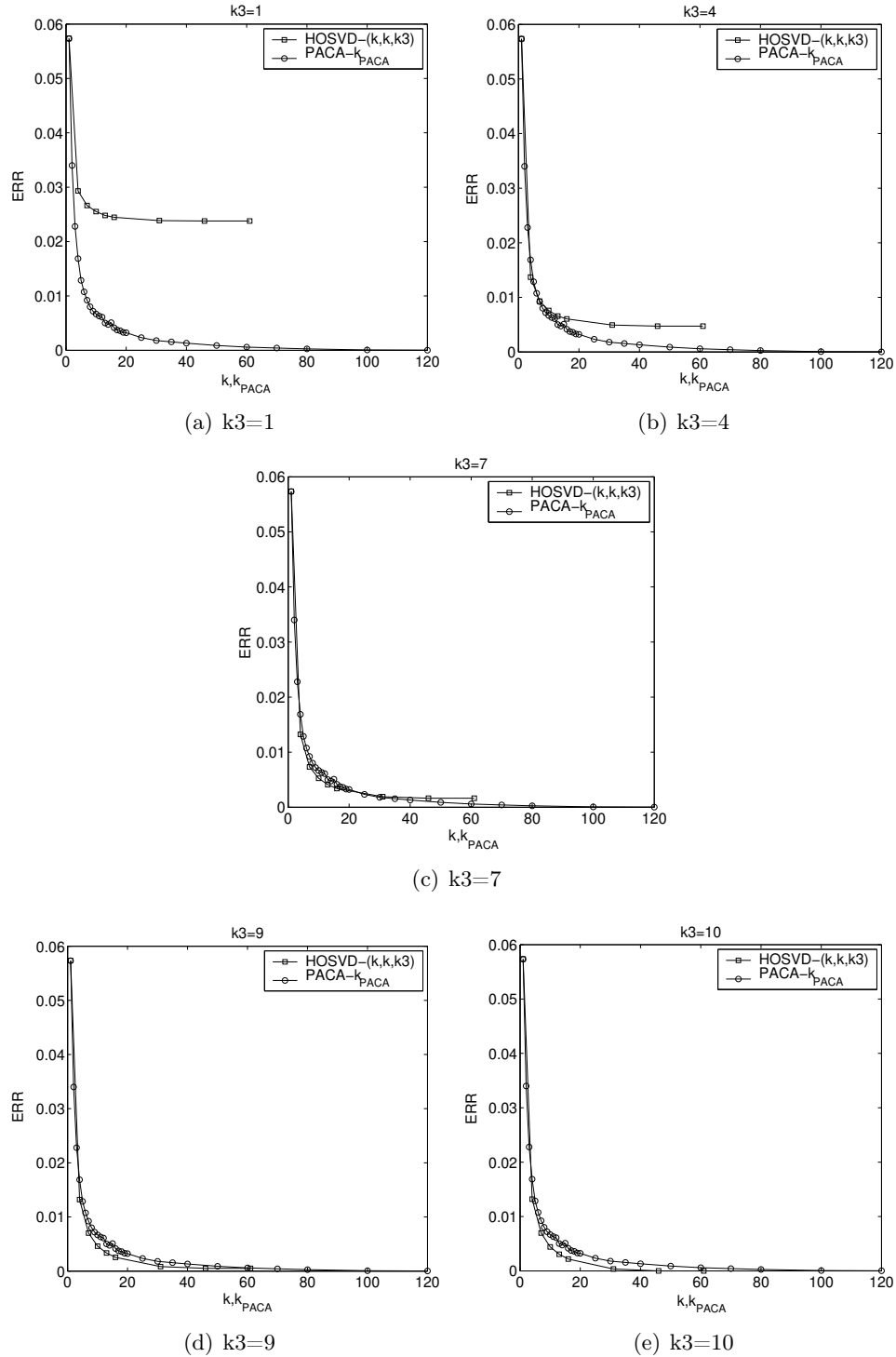


Figure 3.11 — Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence3.

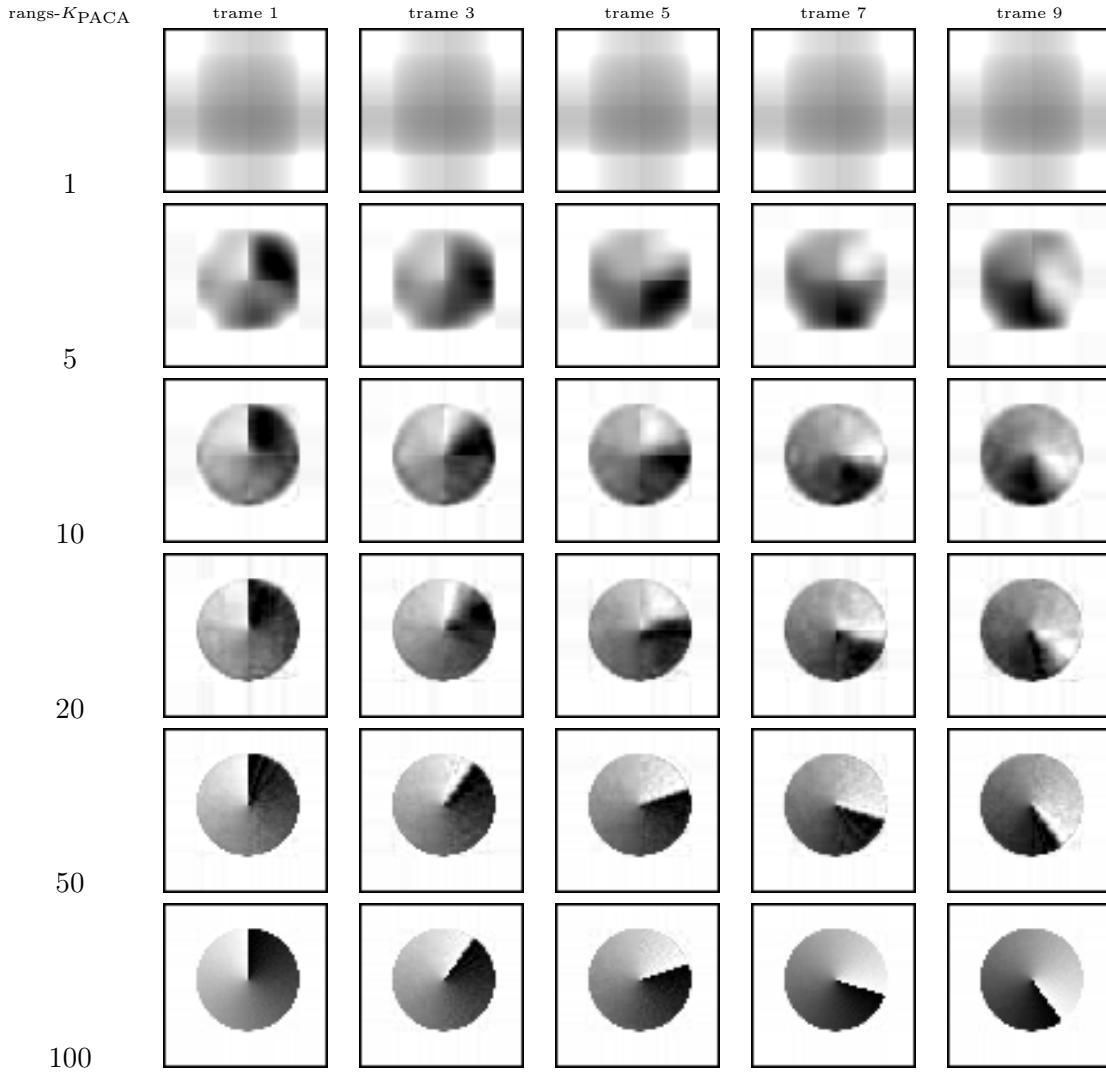


Figure 3.12 — Séquences résultant des approximations PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3 .

3.5 Charge de calcul

Considérons maintenant la charge de calcul impliquée dans chacune des approximations HOSVD- (K, K, K_3) , LRTA- (K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} des images en couleur et séquences d'images en niveaux de gris traitées.

Nous prenons comme unité de référence pour estimer la charge de calcul, le nombre de SVD, ou le nombre de pseudo-inverses impliquées dans chacune des approximations. La charge de calcul supportée par chacune des approximations est donc la suivante :

1. La HOSVD- (K, K, K_3) nécessite le calcul de trois SVD sur des matrices de taille $I_1 \times I_2 I_3$, $I_2 \times I_3 I_1$ et $I_3 \times I_1 I_2$. Le nombre de SVD calculé est égal à l'ordre N du tenseur considéré.

2. En revanche, si k_{stop} est le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme TUCKALS3, l'approximation par LRТА-(K, K, K_3) du tenseur de données nécessite le calcul de $3k_{\text{stop}}$ SVD. Le facteur 3 représente, ici, l'ordre du tenseur.
3. De même, si k_{stop} est le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme PARAFAC ALS¹, la plus grosse partie de la charge de calcul impliquée dans l'approximation PACA- K_{PACA} est supportée par la détermination des k_{stop} pseudo-inverses de l'étape 2(b)ii de cet algorithme. Cette charge de calcul peut devenir extrêmement importante selon les valeurs des dimensions n -modales I_n du tenseur de données MM.

Ainsi, quel que soit le type de données (séquence ou images), la HOSVD-(K, K, K_3) apparaît comme la moins coûteuse en charge de calcul.

Notons enfin que dans les méthodes d'approximation par HOSVD-(K, K, K_3) et LRТА-(K, K, K_3), la détermination des vecteurs propres (ou vecteurs singuliers) associés aux plus grandes valeurs propres (ou singulières), impliqués dans la construction des projecteurs sur les sous-espaces signaux n -modaux, peut être accélérée à l'aide d'algorithmes rapides tels que la Méthode de la Puissance [18, 23].

3.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons effectué la comparaison des méthodes d'approximation par HOSVD(K, K, K_3) et PACA- K_{PACA} appliquées aux tenseurs modélisant trois images en couleur, ainsi que trois séquences d'images en niveaux de gris. Les principaux résultats issus de ces commentaires concernent :

1. la comparaison des courbes d'évolution de l'ERR en fonction des paramètres K_n et K_{PACA} , pour les trois approximations ;
2. l'estimation des rangs tensoriels $\hat{K}_n$ et $\hat{K}_{\text{PACA}}$ pour chaque tenseur de données et leur lien avec le contenu des images ou le mouvement impliqué dans les séquences ;
3. la relation entre les rangs n -modaux $\hat{K}_n$ et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ estimés ;
4. la comparaison des charges de calcul supportées par chaque méthode.

Ils peuvent se résumer dans les points suivants :

Pour les images en couleur :

1. Pour chaque image en couleur considérée, les courbes $\text{ERR}(K, K, 3)$ et $\text{ERR}(K_{\text{PACA}})$ sont confondues. Par conséquent :
 - (a) Les approximations LRТА-($K, K, 3$), HOSVD($K, K, 3$) et PACA- K_{PACA} sont identiques au sens de l'ERR.
 - (b) La PACA- K_{PACA} prend en compte les trois composantes de couleur de façon simultanée.
 - (c) Les rangs tensoriels estimés pour chaque image vérifient : $\hat{K}_{\text{PACA}} = \sup(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3)$.
2. D'autre part, les rangs n -modaux $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$ et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ de chaque image est d'autant plus faible que la structure spatiale de l'image est parallèle aux lignes ou aux colonnes.

¹Voir section 1.5.2.

Pour les séquences d'images en niveaux de gris :

1. Comme dans le cas des images en couleur, les rangs tensoriels estimés pour la Séquence1 (qui représente le mouvement de translation horizontal d'un carré dont les bords sont parallèles aux lignes et aux colonnes), vérifient : $\hat{K}_{PACA} = \sup(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3)$.
2. En revanche, les rangs tensoriels estimés de la Séquence2 et de la Séquence3 (qui représentent respectivement, un mouvement de translation diagonal d'un carré dont les bords sont parallèles aux lignes et aux colonnes, et un mouvement de rotation d'un disque en gradient de niveaux de gris, sur lui-même) vérifient : $\hat{K}_{PACA} > \sup(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3)$.
3. D'autre part, l'estimation des rangs de chacune des séquences aboutit à : $\hat{K}_{PACA}(\text{Séquence1}) < \hat{K}_{PACA}(\text{Séquence2}) < \hat{K}_{PACA}(\text{Séquence3})$.

Nous avons considéré, dans les chapitres 2 et 3, l'étude de l'approximation tensorielle de signaux MM *non bruités*. Dans le chapitre suivant, nous considérerons le cas de signaux MM *bruités*. Nous étudierons quel peut être l'apport de la modélisation tensorielle pour le débruitage de ces signaux. Dans le cadre de la modélisation tensorielle, nous proposons d'élaborer de nouvelles méthodes de filtrage multimodal.

CHAPITRE

4

Filtrage multimodal :
élaboration de nouvelles
méthodes tensorielles pour
les signaux MM bruités

DANS ce chapitre, nous proposons d'élaborer de nouvelles méthodes de débruitage basées sur une modélisation tensorielle des données MM bruitées.

Dans la section 4.1, nous présentons les hypothèses et les objectifs de cette étude. Nous présentons notamment le modèle de signal MM bruité que nous avons adopté.

La section 4.2 propose un bref état de l'art des méthodes tensorielles de débruitage des données MM. La principale méthode a été développée dans le cadre de la séparation d'ondes sismiques [39, 40]. Elle est basée sur la troncature de rang- (K_1, K_2, K_3) de la HOSVD, et étend les méthodes algébriques matricielles établies pour les signaux sismiques vectoriels et matriciels [21, 22, 26, 27, 28, 45, 49, 48].

Dans la section 4.3, nous proposons une nouvelle technique d'estimation d'un signal MM dans le cas d'un bruit additif gaussien et blanc [54]. Cette technique repose sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne et constitue donc un « filtrage de Wiener multimodal ». Elle est notamment comparée à la méthode d'estimation tensorielle par sous-espace vectoriel, présentée à la section 4.2.

La section 4.4 est dédiée au cas d'un bruit additif gaussien corrélé. Dans cette situation, nous proposons une méthode qui améliore l'estimation basée sur l'analyse en composantes principales multimodale (donnée par la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$) grâce aux statistiques d'ordre supérieur, notamment les cumulants d'ordre 4.

Dans toute cette étude, étant donné que la décomposition tensorielle PARAFAC/CANDECOMP n'assure pas l'orthogonalité entre chacun des tenseurs de rang-un qui la composent [33], nous ne l'utilisons pas dans nos techniques de filtrage. Nos méthodes reposent plutôt sur la décomposition de TUCKER3 qui, par construction, contrairement à la décomposition PACA, peut garantir la propriété d'orthogonalité des bases de décomposition sur chacun des n -modes du tenseur de données [35, 34, 16].

4.1 Présentation du problème, hypothèses et objectifs de l'étude

4.1.1 Modèle de signal MM bruité

Considérons le signal MM bruité modélisé dans le cas général par le tenseur $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ qu'on suppose être la somme :

1. d'un tenseur associé à chacun des sous-espaces signal n -modaux que nous avons appelé « tenseur signal » utile, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$,
2. et d'un tenseur associé à chacun des sous-espaces bruit n -modaux que nous avons appelé « tenseur bruit », $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, indépendant du tenseur signal,

de sorte que :

$$\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}. \quad (4.1)$$

Quels que soient les indices $(i_1, \dots, i_N)$, chacun des termes de la relation 4.1 vérifie :

$$r_{i_1 \dots i_N} = x_{i_1 \dots i_N} + b_{i_1 \dots i_N}, \quad (4.2)$$

dans lequel $b_{i_1 \dots i_N}$ est la réalisation d'un bruit additif aléatoire indépendant du tenseur signal.

L'objectif de notre étude est d'estimer au mieux le signal MM utile $\mathcal{X}$ à partir du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$. Pour mener à bien cette estimation, nous pouvons effectuer plusieurs hypothèses sur la nature du bruit. Dans cette étude, nous considérerons que le bruit est gaussien, et successivement les deux hypothèses d'un bruit *blanc* et *corrélé*. Nous élaborons deux techniques de débruitage en fonction de ces deux hypothèses.

4.1.2 Hypothèse de séparabilité

Considérons l'espace n -modal $E^{(n)}$ de dimension I_n , associé au n -mode du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$. Dans ce chapitre, $E^{(n)}$ est considéré comme étant la somme directe de deux sous-espaces orthogonaux, le sous-espace signal $E_s^{(n)}$ et le sous-espace bruit $E_b^{(n)}$:

$$E^{(n)} = E_s^{(n)} \oplus E_b^{(n)}, \forall n = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Conformément aux deux chapitres précédents, $\forall n = 1, \dots, N$, nous appelons $\hat{K}_n$ la dimension du sous-espace signal n -modal $E_s^{(n)}$. La dimension du sous-espace bruit n -modal $E_b^{(n)}$ est donc $I_n - \hat{K}_n$.

Comme il l'a été démontré dans le cadre de la séparation d'ondes sismiques multicomposantes [39], cette hypothèse est en accord avec la nature de certains signaux tels qu'une onde sismique polarisée de vitesse apparente infinie. Dans ce cas, les sous-espaces signaux n -modaux peuvent être obtenus par troncature de rang-(1, 1, 1) de la HOSVD du tenseur de données représentant cette onde [40, 39]. Dans cet exemple, les dimensions des sous-espaces signaux n -modaux sont telles que $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = 1$. D'autre part, comme nous l'avons vérifié au chapitre 2, cette hypothèse est aussi en accord avec la nature de certaines images en couleur telles que Sailboat. En effet, d'après le tableau 2.1, les rangs n -modaux estimés du tenseur associé à cette image sont $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3) = (45, 45, 2)$.

Dans toute la suite, nous supposons que les dimensions des sous-espaces signal n -modaux sont connues.

4.2 État de l'art sur le traitement des données tensorielles

4.2.1 Traitement par tranche bidimensionnelle

La méthode classique la plus simple pour traiter les données MM est de découper le tenseur de données en tranches bidimensionnelles. Dans le cadre du traitement des images en couleur, ce traitement implique généralement chacune des images en niveaux de gris associées au canal de couleur rouge, verte ou bleue [24]. En traitement des signaux sismiques polarisés, le découpage des données s'effectue généralement suivant chaque composante de polarisation [39].

Considérons des données trimodales $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. Chaque « tranche » bidimensionnelle $\mathcal{R}(:, :, i_3)$, $i_3 = 1, \dots, I_3$ peut être considérée comme la somme d'une tranche bidimensionnelle signal $\mathcal{X}(:, :, i_3)$ et d'une tranche bidimensionnelle bruit $\mathcal{B}(:, :, i_3)$:

$$\mathcal{R}(:, :, i_3) = \mathcal{X}(:, :, i_3) + \mathcal{B}(:, :, i_3), i_3 = 1, \dots, I_3, \quad (4.4)$$

de sorte que les traitements algébriques classiques [21, 22, 26, 27, 28, 45, 49, 48] puissent être appliqués. Ces méthodes reposent sur la Transformation de Karhunen-Loeve (TKL) et la SVD de chacune des tranches [2, 26]. Les vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières les plus grandes de chaque tranche définissent le sous-espace signal. Chaque tranche $\hat{\mathcal{X}}(:, :, i_3)$ du tenseur signal estimé est donc obtenue en projetant la tranche de données $\mathcal{R}(:, :, i_3)$ sur l'espace engendré par ces vecteurs singuliers. Enfin, le tenseur signal est obtenu en fusionnant chacune des tranches signal estimées.

4.2.2 Méthode par sous-espaces adaptée aux données trimodales

Une méthode tensorielle pour estimer un signal MM a récemment été proposée dans le cadre de la séparation d'ondes sismiques polarisées [39, 40]¹. Cette méthode est basée sur la troncature de rang- (K_1, K_2, K_3) de la HOSVD des signaux sismiques polarisés modélisés par des tenseurs d'ordre trois, et étend les méthodes algébriques matricielles établies pour les signaux sismiques vectoriels et matriciels [21, 22, 26, 27, 28, 45, 49, 48].

Dans cette méthode, le tenseur de données bruitées $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$ se décompose en la somme $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$.

Dans le cadre de la séparation d'ondes, l'estimation du tenseur signal est effectué en appliquant le projecteur $P_s^{(n)} = U_s^{(n)} U_s^{(n)T}$ sur chacun des n -modes du tenseur $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{X} = \mathcal{R} \times_1 P_s^{(1)} \times_2 P_s^{(2)} \times_3 P_s^{(3)}. \quad (4.5)$$

Quel que soit le n -mode, la matrice $U_s^{(n)}$ est constituée des K_n vecteurs singuliers associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la matrice R_n , dépliant du tenseur $\mathcal{R}$ dans le n -mode. Par définition, le tenseur signal $\mathcal{X}$ de la relation (4.5) est donc obtenu par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$. Dans cette méthode, la dimension du sous-espace signal n -modal est connue *a priori* ou estimée en étudiant l'évolution des valeurs singulières des dépliantes R_n .

D'autre part, cette technique, élaborée dans le cadre de la séparation d'ondes sismiques, suppose que dans chaque n -mode, une base orthogonale du sous-espace signal n -modal est constituée par les vecteurs singuliers associés aux plus grandes valeurs singulières de la matrice R_n , dépliant dans le n -mode du tenseur de données.

Nous avons récemment adapté cette méthode pour le filtrage multimodal et le débruitage des images en couleur qui, comme les signaux sismiques polarisés, sont modélisés par des tenseurs d'ordre trois [58, 59].

Comme il l'a été montré dans [34] et rappelé au chapitre 1, la LRTA- (K_1, K_2, K_3) effectue une ACP multimodale sur chacun des n -modes du tenseur de données. La HOSVD- (K_1, K_2, K_3) ne constitue qu'une forme approximée de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) , car celle-ci constitue l'étape d'initialisation de l'algorithme TUCKALS3². Nous avons cependant vérifié au chapitre 3 que, dans toutes les situations que nous avons pu rencontrer, les résultats obtenus à l'aide de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) sont sensiblement similaires à ceux donnés par la LRTA- (K_1, K_2, K_3) . Ainsi, dans la suite, conformément aux études [39, 40], nous utilisons la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) pour réaliser le filtrage par ACP multimodale classique.

¹Pages 40-41 et 58-59 de [39].

²Qui permet d'obtenir la LRTA- (K_1, K_2, K_3) .

Dans la section suivante, nous proposons une nouvelle méthode de filtrage multimodal dans laquelle chaque filtre n -modal est obtenu en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré et le tenseur estimé [57, 54]. Par extension du cas monodimensionnel, nous nommons ce filtrage par « filtrage multimodal de Wiener ». Cette méthode est construite sur l'hypothèse d'un bruit additif, gaussien et blanc.

4.3 Cas d'un bruit additif gaussien blanc

4.3.1 Estimation du tenseur signal par filtrage de Wiener multimodal

4.3.1.1 Formulation du problème

Considérons le cas général d'un tenseur de données $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N , résultant de l'échantillonnage d'un signal MM $\mathcal{X}$ et d'un bruit additif gaussien et blanc $\mathcal{B}$: $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$. L'hypothèse d'un bruit blanc, de moyenne nulle, stationnaire et homogène, se traduit mathématiquement par :

$$\mathbb{E}[b_{i_1 \dots i_N} b_{j_1 \dots j_N}] = \sigma^2 \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_N j_N}, \quad (4.6)$$

dans laquelle σ^2 est la puissance du bruit, $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'opérateur d'espérance statistique, i_k et $j_k \in \{1, \dots, I_k\}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, et δ est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Le but de notre approche est d'estimer le tenseur signal $\mathcal{X}$ en filtrant, dans chaque n -mode, le tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ par les filtres n -modaux $H_n \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n}$, $\forall n = 1, \dots, N$:

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N. \quad (4.8)$$

Chaque filtre n -modal H_n est appliqué sur le n -mode de $\mathcal{R}$ par le biais du n -mode produit qui effectue le produit matriciel entre la matrice H_n et tous les vecteurs n -modaux de $\mathcal{R}$.

Le critère utilisé pour déterminer les filtres n -modaux H_n optimaux est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré $\mathcal{X}$ et le tenseur estimé $\hat{\mathcal{X}}$:

$$e(H_1, \dots, H_N) = \mathbb{E} \left[\left\| \mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}} \right\|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left\| \mathcal{X} - \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \right\|^2 \right]. \quad (4.9)$$

Par extension du cas monodimensionnel, le filtre H_n peut être appelé "filtre de Wiener n -modal".

De même que dans l'algorithme TUCKALS3, la minimisation de l'erreur $e(H_1, \dots, H_N)$ de la relation (4.9) constitue un problème d'optimisation non-linéaire qui peut être résolu par un algorithme numérique basé sur les moindres carrés alternés (ALS). Dans les sections suivantes, nous présentons les étapes et les hypothèses nécessaires à la minimisation de l'erreur e et à la détermination des filtres optimaux $H_n, \forall n = 1, \dots, N$.

4.3.1.2 Expression analytique des filtres de Wiener n -modaux

Les filtres de Wiener n -modaux H_n sont obtenus lorsque le minimum absolu de l'erreur quadratique $e(H_1, \dots, H_N)$, de la relation (4.9), est déterminé.

L'erreur quadratique $e(H_1, \dots, H_N)$ peut s'exprimer en fonction du produit scalaire tensoriel³ par :

$$e(H_1, \dots, H_N) = \mathbb{E} \left[\|\mathcal{X}\|^2 \right] - 2\mathbb{E} [\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \rangle] + \mathbb{E} \left[\|\mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N\|^2 \right]. \quad (4.10)$$

L'expression de e en fonction des matrices X_n et R_n , dépliantes dans le n -mode des tenseurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{R}$, est donnée par :

$$e(H_1, \dots, H_N) = \mathbb{E} \left[\|X_n\|^2 \right] - 2\mathbb{E} \left[\text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right) \right] + \mathbb{E} \left[\text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right) \right], \quad (4.11)$$

dans laquelle :

$$g_{XR}^{(n)} = X_n \mathbf{q}^{(n)} R_n^T, \quad (4.12)$$

avec :

$$\mathbf{q}^{(n)} = H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1} \otimes H_{n+1} \cdots \otimes H_N. \quad (4.13)$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$G_{RR}^{(n)} = R_n \mathbf{Q}^{(n)} R_n^T, \quad (4.14)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(n)T} \mathbf{q}^{(n)} = H_1^T H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T H_{n-1} \otimes H_{n+1}^T H_{n+1} \cdots \otimes H_N^T H_N. \quad (4.15)$$

Les calculs relatifs à l'expression (4.11) sont présentés en intégralité en annexe B.1.

Les filtres de Wiener n -modaux optimaux $\{H_1, \dots, H_N\}$ sont les arguments qui minimisent l'erreur quadratique e de la relation (4.11). Ces filtres sont obtenus lorsque :

$$\mathbf{grad}(e) = \left[\frac{\partial e}{\partial H_1} \cdots \frac{\partial e}{\partial H_N} \right]^T = 0, \quad (4.16)$$

c'est-à-dire, lorsque les termes $\frac{\partial e}{\partial H_n}$ sont conjointement nuls pour $n = 1, \dots, N$. Étudions donc l'expression de $\frac{\partial e}{\partial H_n}$ pour un n -mode donné. Supposons que les filtres H_m , $\forall m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$ sont fixés. Par conséquent, en dérivant la relation (4.11) par rapport au filtre H_n à H_m constant, $\frac{\partial e}{\partial H_n} = 0$ implique que :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right) \right] = 2\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right) \right]. \quad (4.17)$$

En remarquant que les matrices $g_{XR}^{(n)}$ et $G_{RR}^{(n)}$ sont indépendantes de H_n , il est possible d'exprimer simplement les dérivées des deux bords de la relation (4.17), et d'extraire l'expression du filtre de Wiener n -modal optimal donné par :

$$H_n = \mathbb{E} \left[g_{XR}^{(n)} \right] \mathbb{E} \left[G_{RR}^{(n)} \right]^{-1}. \quad (4.18)$$

³Défini à la section 1.2.3.

Le filtre n -modal H_n ainsi trouvé dépend des autres filtres m -modaux fixés à une valeur constante pour $m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$. Les calculs relatifs à cette dernière simplification peuvent être consultés en annexe B.1.

Définissons la matrice de covariance n -modale $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée⁴, entre le tenseur signal $\mathcal{X}$ et le tenseur de données par :

$$\gamma_{XR}^{(n)} = \mathbb{E} \left[g_{XR}^{(n)} \right], \quad (4.19)$$

ainsi que la matrice de covariance n -modale $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée du tenseur de données $\mathcal{R}$ par :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \mathbb{E} \left[G_{RR}^{(n)} \right]. \quad (4.20)$$

Le filtre de Wiener n -modal peut alors s'exprimer par :

$$H_n = \gamma_{XR}^{(n)} \Gamma_{RR}^{(n)-1}. \quad (4.21)$$

Dans toute la suite des calculs, pour faciliter les notations, la lettre γ sera associé à la matrice de covariance $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée, et la lettre Γ à la matrice de covariance $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée.

4.3.1.3 Hypothèses sur la dépliante dans le n -mode du tenseur signal

Dans l'expression du filtre de Wiener n -modal donné à la relation (4.21) et en supposant que les filtres H_m , $m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$ sont connus, la matrice $\Gamma_{RR}^{(n)}$ est une grandeur parfaitement calculable car elle ne dépend que du tenseur $\mathcal{R}$ qui est une donnée initiale. En revanche, la matrice $\gamma_{XR}^{(n)}$ ne peut pas être déterminée directement car elle dépend du tenseur signal $\mathcal{X}$ qui est inconnu et qui reste à estimer. Pour contourner cette indétermination nous proposons une hypothèse sur la forme de la matrice dépliante X_n .

Nous avons considéré à la section 4.1.2 que l'espace vectoriel n -modal $E^{(n)}$ associé à $\mathcal{R}$ est la somme directe et orthogonale entre le sous-espace signal $E_s^{(n)}$ de dimension K_n et le sous-espace bruit $E_b^{(n)}$: $E^{(n)} = E_s^{(n)} \oplus E_b^{(n)}$. En se basant sur cette remarque, nous pouvons effectuer l'hypothèse que la matrice X_n peut s'exprimer comme la combinaison linéaire de K_n vecteurs orthogonaux issus d'une base du sous-espace signal n -modal $E_s^{(n)}$. Ceci se traduit mathématiquement par :

$$X_n = V_s^{(n)} O^{(n)}, \quad (4.22)$$

dans laquelle :

1. la matrice orthonormée $V_s^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times K_n}$ contient K_n vecteurs orthogonaux issus d'une base du sous-espace signal n -modal $E_s^{(n)}$,
2. et la matrice $O^{(n)}$ est une matrice aléatoire de pondération dont tous les termes sont supposés mutuellement indépendants :

$$\mathbb{E} [o_{kl} o_{mn}] = \alpha_{kl} \delta_{km} \delta_{ln}, \quad (4.23)$$

Par définition, la matrice $O^{(n)}$ contient l'information associée au n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$ et sera donc appelée « matrice objet ».

Ce modèle implique nécessairement que la dépliante X_n est orthogonale à la matrice B_n , dépliante dans le n -mode du tenseur bruit $\mathcal{B}$, étant donné que le sous-espace signal et le sous-espace bruit sont supposés mutuellement orthogonaux.

⁴Pondérée par $\mathbf{q}^{(n)}$.

4.3.1.4 Expression du filtre de Wiener n -modal associé aux hypothèses

Le détail des calculs relatifs à cette section sont regroupés en annexe B.2.

Expression de $\Gamma_{RR}^{(n)}$ - En prenant en compte le modèle de la dépliante X_n dans le n -mode, donné par la relation (4.22), ainsi que la condition d'indépendance entre le signal et le bruit blanc gaussien, il est possible de montrer que la matrice de covariance n -modale $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée $\Gamma_{RR}^{(n)}$ peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = V_s^{(n)} \Gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T} + \sigma_\Gamma^{(n)^2} I_{I_n}, \quad (4.24)$$

dans laquelle $I_{I_n} \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n}$ est la matrice identité, et la matrice $\Gamma_{OO}^{(n)}$ est définie comme la matrice de covariance $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée de la matrice objet $O^{(n)}$. Cette matrice est diagonale et s'exprime par :

$$\Gamma_{OO}^{(n)} = E \left[O \mathbf{Q}^{(n)} O^T \right] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_{K_n} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

avec :

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{M_n} Q_{kk}^{(n)} \alpha_{ik}, \quad (4.26)$$

dans laquelle α_{ik} est défini à la relation (4.23). D'autre part, $\sigma_\Gamma^{(n)^2}$ est défini par :

$$\sigma_\Gamma^{(n)^2} = \text{tr}(\mathbf{Q}^{(n)}) \sigma^2, \quad (4.27)$$

dans laquelle σ^2 est la puissance du bruit définie à la relation (4.6).

La relation (4.24) peut alors se réduire sous la forme :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \begin{bmatrix} V_s^{(n)} & | & V_b^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\Gamma_b}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^{(n)T} \\ V_b^{(n)T} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

dans laquelle $V_b^{(n)} \in \mathbb{R}^{(I_n - K_n) \times I_n}$ est une matrice contenant les vecteurs d'une base orthogonale du sous-espace bruit n -modal. D'autre part $\Lambda_{\Gamma_s}^{(n)}$ et $\Lambda_{\Gamma_b}^{(n)}$ sont des matrices diagonales définies par :

$$\Lambda_{\Gamma_s}^{(n)} = \Gamma_{OO}^{(n)} + \sigma_\Gamma^{(n)^2} I_{K_n} = \begin{bmatrix} \lambda_1^\Gamma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{K_n}^\Gamma \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

dans laquelle $\forall i = 1, \dots, K_n$:

$$\lambda_i^\Gamma = \epsilon_i + \sigma_\Gamma^{(n)^2}, \quad (4.30)$$

et enfin :

$$\Lambda_{\Gamma_b}^{(n)} = \sigma_\Gamma^{(n)^2} I_{I_n - K_n}. \quad (4.31)$$

Par construction, la matrice $\begin{bmatrix} V_s^{(n)} & | & V_b^{(n)} \end{bmatrix}$ est unitaire et la matrice $\begin{bmatrix} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\Gamma_b}^{(n)} \end{bmatrix}$ est diagonale. Par conséquent, l'unicité de la décomposition en valeurs propres implique que $V_s^{(n)}$

est la matrice des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$. De même $V_b^{(n)}$ est la matrice des $I_n - K_n$ vecteurs propres associés aux $I_n - K_n$ plus petites valeurs propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$. Enfin, $\{\lambda_i^\Gamma, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ constitue l'ensemble des K_n plus grandes valeurs propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$, et les $I_n - K_n$ plus petites valeurs propres sont toutes égales à $\sigma_\Gamma^{(n)^2}$.

Il est donc possible d'estimer les vecteurs et valeurs de $V_s^{(n)}$, $V_b^{(n)}$, $\{\lambda_i^\Gamma, \forall i = 1, \dots, K_n\}$, et $\sigma_\Gamma^{(n)^2}$ grâce à la décomposition en éléments propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$, qui est une grandeur connue.

Expression de $\gamma_{XR}^{(n)}$ - De même, en prenant en compte les hypothèses précédentes, la matrice de covariance n -modale $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée $\gamma_{XR}^{(n)}$ peut se mettre sous la forme :

$$\gamma_{XR}^{(n)} = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T}. \quad (4.32)$$

Dans la relation (4.32), la matrice $\gamma_{OO}^{(n)}$ est définie comme la matrice de covariance $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée de la matrice objet $O^{(n)}$. Nous montrons en annexe B.2 que cette matrice est diagonale et s'exprime par :

$$\gamma_{OO}^{(n)} = \mathbb{E} [O \mathbf{q}^{(n)} O^T] = \begin{bmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{K_n} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

dans laquelle $\forall i = 1, \dots, K_n$:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{M_n} q_{kk}^{(n)} \alpha_{ik}, \quad (4.34)$$

et où α_{ik} est défini à la relation (4.23).

Il est possible de calculer les valeurs de $V_s^{(n)}$ et $\{\beta_i, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ à partir de la décomposition en valeurs propres de la matrice $\gamma_{RR}^{(n)}$, définie par :

$$\gamma_{RR}^{(n)} = \mathbb{E} [R_n \mathbf{q}^{(n)} R_n^T]. \quad (4.35)$$

En effet, de même que pour $\Gamma_{RR}^{(n)}$, nous pouvons montrer (voir annexe B.2) que $\gamma_{RR}^{(n)}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\gamma_{RR}^{(n)} = [V_s^{(n)} V_b^{(n)}] \begin{bmatrix} \Lambda_{\gamma_s}^{(n)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\gamma_b}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^{(n)T} \\ V_b^{(n)T} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

dans laquelle :

$$\Lambda_{\gamma_s}^{(n)} = \gamma_{OO}^{(n)} + \sigma_\gamma^{(n)^2} \mathbf{I}_{K_n} = \begin{bmatrix} \lambda_1^\gamma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{K_n}^\gamma \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

où $\forall i = 1, \dots, K_n$:

$$\lambda_i^\gamma = \beta_i + \sigma_\gamma^{(n)^2}, \quad (4.38)$$

et :

$$\Lambda_{\gamma_b}^{(n)} = \sigma_\gamma^{(n)^2} \mathbf{I}_{I_n - K_n}. \quad (4.39)$$

L'unicité de la décomposition en valeurs propres implique que $V_s^{(n)}$ est la matrice des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$ et que $V_b^{(n)}$ est la matrice des $I_n - K_n$ vecteurs propres associés aux $I_n - K_n$ plus petites valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$. De plus, $\{\lambda_i^\gamma, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ constitue l'ensemble des K_n plus grandes valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$, et les $I_n - K_n$ plus petites valeurs propres sont toutes égales à $\sigma_\gamma^{(n)^2}$.

Par conséquent, il est possible d'obtenir l'ensemble $\{\beta_i, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ en calculant les valeurs propres de la matrice $\gamma_{RR}^{(n)}$, et en effectuant $\forall i = 1, \dots, K_n$:

$$\beta_i = \lambda_i^\gamma - \sigma_\gamma^{(n)^2}. \quad (4.40)$$

Expression finale du filtre de Wiener n -modal - En introduisant l'expression (4.32) de $\gamma_{XR}^{(n)}$ et l'expression (4.28) de $\Gamma_{RR}^{(n)}$, dans l'expression (4.21) du filtre de Wiener n -modal, et en prenant en compte l'orthogonalité de l'espace signal et de l'espace bruit n -modal :

$$V_s^{(n)T} V_b^{(n)} = 0_{K_n \times I_n - K_n}, \quad (4.41)$$

l'expression finale du filtre de Wiener n -modal est donnée par :

$$H_n = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1} V_s^{(n)T}. \quad (4.42)$$

Dans la relation (4.42), $\gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1}$ est une matrice diagonale donnée par :

$$\gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^\gamma - \sigma_\gamma^{(n)^2}}{\lambda_1^\Gamma} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_{K_n}^\gamma - \sigma_\gamma^{(n)^2}}{\lambda_{K_n}^\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

dans laquelle $\{\lambda_i^\gamma, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ et $\{\lambda_i^\Gamma, \forall i = 1, \dots, K_n\}$ sont les K_n plus grandes valeurs propres, respectivement des matrices $\gamma_{RR}^{(n)}$ et $\Gamma_{RR}^{(n)}$ définies aux relations (4.35) et (4.20). Ce sont des grandeurs parfaitement calculables car elles ne dépendent que de $\mathcal{R}$ et des filtres m -modaux $\{H_m, m \neq n\}$ supposés connus. D'autre part, $\sigma_\gamma^{(n)^2}$ peut être estimée en calculant la moyenne des $I_n - K_n$ plus petites valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$:

$$\widehat{\sigma_\gamma^{(n)^2}} = \frac{1}{I_n - K_n} \sum_{i=K_n+1}^{I_n} \lambda_i^\gamma. \quad (4.44)$$

Enfin, dans la relation (4.42), la matrice $V_s^{(n)}$ représente la matrice des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres des matrices $\gamma_{RR}^{(n)}$ et $\Gamma_{RR}^{(n)}$.

Par conséquent, le filtre de Wiener n -modal H_n représente une projection orthogonale sur le sous-espace signal n -modal engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $V_s^{(n)}$. Cette projection est pondérée par la matrice diagonale $\gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1}$, et dépend des filtres m -modaux $\{H_m, m \neq n\}$.

Commentaires - Le filtre de Wiener multimodal dépend des dimensions des sous-espaces signaux n -modaux $K_1, \dots, K_N$. Ces paramètres doivent être connus *a priori* ou estimés lors du filtrage. Dans la suite, nous pourrions employer la notation « filtrage de Wiener multimodal de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ ».

Remarquons de plus que lorsque le bruit est nul, la matrice de pondération $\gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1}$ est alors égale à la matrice identité. En effet, dans la relation (4.43) le terme $\sigma_\gamma^{(n)^2}$ est nul. Le filtre de Wiener n -modal H_n devient donc égal à $V_s^{(n)} V_s^{(n)T} = P^{(n)}$, c'est-à-dire le projecteur n -modal sur les K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice $C^{(n)} = R_n(P^{(1)} \otimes \dots \otimes P^{(n-1)} \otimes P^{(n+1)} \dots \otimes P^{(N)}) R_n^T$. Or, la matrice $C^{(n)}$ est donné à l'étape 2(a)iii de l'algorithme TUCKALS3 (cf. section 1.4.4). Par conséquent, dans le cas où le bruit est nul, le filtrage de Wiener multimodal de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ est strictement équivalent à l'ACP multimodale obtenue par approximation tensorielle LRTPA- $(K_1, \dots, K_N)$ du tenseur de données $\mathcal{R}$.

Dans la section suivante, nous présentons l'algorithme itératif permettant d'obtenir l'ensemble des filtres n -modaux qui minimise l'erreur quadratique moyenne $e(H_1, \dots, H_N)$ donnée à la relation (4.9).

4.3.1.5 Algorithme itératif des moindres carrés alternés

La détermination des filtres n -modaux $\{H_n, n = 1, \dots, N\}$ qui permettent d'atteindre le minimum global de l'erreur $e(H_1, \dots, H_N)$ s'effectue à l'aide d'un algorithme ALS. Cet algorithme a pour but de construire les suites matricielles $\{H_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}, \forall n = 1, \dots, N$, qui convergent vers les filtres de Wiener n -modaux optimaux $H_n, \forall n = 1, \dots, N$. Ceci est équivalent à construire la suite tensorielle $\{\mathcal{X}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le tenseur signal estimé optimal $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N$. Chaque itération de l'algorithme ALS est composée de N étapes. Dans la $n^{\text{ième}}$ étape, $\forall m \neq n$ les filtres m -modaux H_m^k sont fixés à la valeur de leur $k^{\text{ième}}$ itération, et la valeur de la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération du filtre n -modal H_n^{k+1} est déterminée en utilisant la relation (4.42).

L'algorithme ALS permettant d'estimer le tenseur signal $\hat{\mathcal{X}}$ par filtrage multimodal de Wiener du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ est donc donné par :

1. Entrée : tenseur de donnée $\mathcal{R}$.

Initialisation $k = 0 : \mathcal{X}^0 = \mathcal{R} \Leftrightarrow H_n^0 = I_{I_n}, \forall n = 1, \dots, N$.

2. Boucle ALS :

Répéter jusqu'à convergence, c'est-à-dire, par exemple, tant que $\|\mathcal{X}^{k+1} - \mathcal{X}^k\|^2 > \epsilon$, $\epsilon > 0$ étant un seuil fixé *a priori*,

- (a) Pour $n = 1$ à N :

- i. Former le tenseur $\mathcal{X}_n^k = \mathcal{R} \times_1 H_1^k \cdots \times_{n-1} H_{n-1}^k \times_{n+1} H_{n+1}^k \cdots \times_N H_N^k$;

- ii. Calculer le filtre n -modal $H_n^{k+1} = \arg \min_{Q_n \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n}} \|\mathcal{X} - \mathcal{X}_n^k \times_n Q_n\|^2$ à l'aide de la relation (4.42) ;

- (b) Calculer le tenseur $\mathcal{X}^{k+1} = \mathcal{R} \times_1 H_1^{k+1} \cdots \times_N H_N^{k+1}$;

- (c) Incrémenter k : $k \leftarrow k + 1$;
3. Sortie : $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{R} \times_1 H_1^{k_{\text{stop}}} \cdots \times_N H_N^{k_{\text{stop}}}$, dans lequel k_{stop} est l'indice de la dernière itération après convergence de l'algorithme.

Grâce à la relation (4.43), l'étape 2(a)ii de l'algorithme précédent peut être décomposée selon les sous-étapes suivantes :

1. Déplier suivant le n -mode le tenseur $\mathcal{X}_n^k$ en la matrice $X_n^k = R_n(H_1^k \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^k \otimes H_{n+1}^k \cdots \otimes H_N^k)^T$;
2. Calculer $\gamma_{RR}^n = \mathbb{E} [R_n X_n^{kT}]$;
3. Effectuer la décomposition en valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$;
4. Calculer $\hat{\sigma}_{\gamma_n}^2$, i.e. la moyenne des $(I_n - K_n)$ plus petites valeurs propres de $\gamma_{RR}^{(n)}$, en utilisant la relation (4.44) ;
5. Calculer $\Gamma_{RR}^{(n)} = \mathbb{E} [X_n^k X_n^{kT}]$;
6. Effectuer la décomposition en valeurs propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$;
7. Former la matrice $V_s^{(n)}$ des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de $\Gamma_{RR}^{(n)}$ et mémoriser les K_n plus grandes valeurs propres $\lambda_{k_n}^\Gamma$, $\forall k_n = 1, \dots, K_n$;
8. Calculer la matrice $\gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1}$ à l'aide de la relation (4.43) ;
9. Calculer la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération du filtre de Wiener n -modal H_n^{k+1} grâce à la relation (4.42).

4.3.1.6 Comparaison avec le filtre de Wiener pour les signaux vectoriels

Dans le cas des signaux vectoriels, le vecteur de données bruitées $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^M$ résulte de l'enregistrement d'un vecteur signal $\mathbf{x}$ et d'un bruit additif $\mathbf{b}$ supposé gaussien et blanc :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (4.45)$$

Comme dans le cas des données MM, l'estimation du vecteur signal par filtrage de Wiener s'effectue en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le vecteur signal désiré $\mathbf{x}$ et son estimation $\hat{\mathbf{x}} = H\mathbf{r}$, dans laquelle H est l'expression matricielle de la fonction de transfert du filtre de Wiener à déterminer :

$$e(H) = \mathbb{E} [\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2] = \mathbb{E} [\|\mathbf{x} - H\mathbf{r}\|^2]. \quad (4.46)$$

La minimisation de (4.46) par rapport à H donne l'expression du filtre de Wiener :

$$H = \Gamma_{\mathbf{xr}} \Gamma_{\mathbf{rr}}^{-1}, \quad (4.47)$$

dans laquelle $\Gamma_{\mathbf{xr}} = \mathbb{E} [\mathbf{xr}^T]$ est la matrice de covariance entre le vecteur signal et le vecteur de données, et $\Gamma_{\mathbf{rr}} = \mathbb{E} [\mathbf{rr}^T]$ est la matrice de covariance du vecteur de données.

L'hypothèse stipulant que le vecteur signal $\mathbf{x}$ est une combinaison linéaire des K vecteurs de base du sous-espace signal E_s s'exprime par :

$$\mathbf{x} = V_s \mathbf{o} = \sum_{m=1}^K o_m \mathbf{v}_m, \quad (4.48)$$

dans laquelle $V_s = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_R] \in \mathbb{R}^{M \times K}$ est la matrice orthonormale des K vecteurs de base du sous-espace signal, et $\mathbf{o} = [o_1 \dots o_K]^T \in \mathbb{R}^K$ un vecteur aléatoire appelé vecteur objet, supposé caractériser entièrement le vecteur signal $\mathbf{x}$.

En introduisant l'hypothèse (4.48) dans la relation (4.47), nous obtenons l'expression finale du filtre de Wiener donnée par :

$$H = V_s \Gamma_{\mathbf{o}\mathbf{o}} \Lambda_s^{-1} V_s^T, \quad (4.49)$$

dans laquelle la matrice $\Gamma_{\mathbf{o}\mathbf{o}} \Lambda_s^{-1}$ est diagonale :

$$\Gamma_{\mathbf{o}\mathbf{o}} \Lambda_s^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 - \sigma^2}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_R - \sigma^2}{\lambda_R} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

De même que dans le cas des données MM, le filtre de Wiener ainsi déterminé représente une projection orthogonale sur le sous-espace signal engendré par les K vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$. De plus, chacun des vecteurs unitaires définissant cette projection est pondéré par un élément de la matrice $\Gamma_{\mathbf{o}\mathbf{o}} \Lambda_s^{-1}$.

Il apparaît clairement, d'après les relations (4.49) et (4.50), que chaque filtre n -modal trouvé dans le cas de données tensorielles (cf. relations (4.42) et (4.43)) est une extension du filtre de Wiener classique obtenu dans le cas de données vectorielles.

La différence principale entre le cas vectoriel et le cas tensoriel réside dans la nature des éléments de pondération. En effet, comme le montre la relation (4.43), dans le cas tensoriel, les poids n -modaux $\frac{\lambda_i^\gamma - \sigma_\gamma^{(n)^2}}{\lambda_i^\gamma}$, $\forall i = 1, \dots, K_n$ dépendent du tenseur de données $\mathcal{R}$ et des filtres m -modaux H_m , $\forall m \neq n$ par le biais des matrices de covariance n -modales $\mathbf{q}^{(n)}$ et $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérées : $\gamma_{RR}^{(n)}$ et $\Gamma_{RR}^{(n)}$. En revanche, dans le cas vectoriel, les éléments de pondération $\frac{\lambda_i - \sigma^2}{\lambda_i}$, $\forall i = 1, \dots, K$ dépendent uniquement du vecteur de données $\mathbf{r}$.

4.3.2 Simulations et résultats du filtrage de Wiener multimodal

Dans cette section, nous appliquons le filtrage de Wiener multimodal au cas du débruitage d'images en couleur et de signaux sismiques multicomposantes, tous deux modélisés par des tenseurs de données d'ordre trois. D'autre part, nous comparons ce nouveau filtrage multimodal, tout d'abord à un traitement classique des données MM obtenu par filtrage de Wiener de chaque tranche bidimensionnelle séparément, et ensuite à un filtrage multimodal obtenu par la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) des données tensorielles, c'est-à-dire par ACP multimodale⁵.

⁵Voir section 4.2.

4.3.2.1 Critère de qualité et protocole expérimental

Considérons un signal MM bruité quelconque $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$. Dans toute la suite, nous définissons le rapport signal sur bruit (SNR en dB) généralisé aux données tensorielles par :

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\|\mathcal{X}\|^2}{\|\mathcal{B}\|^2} \right). \quad (4.51)$$

Afin de mesurer la qualité *a posteriori* des signaux MM estimés $\hat{\mathcal{X}}$:

1. soit grâce au filtrage de Wiener multimodal,
2. soit grâce au filtrage par ACP multimodale classique, obtenu par HOSVD- (K_1, K_2, K_3)
3. soit grâce au filtrage de Wiener de chaque tranche bidimensionnelle du tenseur de données $\mathcal{R}$,

nous proposons d'utiliser l'Erreur Reconstruction Relative (ERR) définie par :

$$ERR(\hat{\mathcal{X}}) = \frac{\|\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{X}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2}. \quad (4.52)$$

De même que dans les chapitres 2 et 3, ce critère nous permet d'effectuer une comparaison qualitative des différentes méthodes de filtrage *a posteriori*.

Comme nous l'avons fait remarquer dans les commentaires de la section 4.3.1.4, le filtrage de Wiener multimodal nécessite la connaissance *a priori* des dimensions K_n des sous-espaces signal n -modaux. Cette remarque est aussi valable pour le filtrage par ACP multimodale obtenue par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) . Ainsi, dans nos simulations, pour satisfaire à la remarque précédente, nous choisissons des signaux MM dont les rangs n -modaux sont connus *a priori*.

Dans les simulations suivantes nous comparons, à l'aide du critère de l'ERR, les trois techniques de filtrage suivantes :

1. Le filtrage de Wiener multimodal de rang- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ [57], dont l'algorithme est proposé à la section 4.3.1.6. Nous notons ce filtrage par « Wmm- (K_1, K_2, K_3) ».
2. Le filtrage par ACP multimodale classique, obtenu par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) de $\mathcal{R}$ [39].
3. Le traitement obtenu par filtrage de Wiener bidimensionnel classique (Wcc) [24] effectué sur chacune des tranches bidimensionnelles obtenue pour un indice 3-modal du tenseur $\mathcal{R}$ fixé :
 - (a) Pour les images en couleur, ces tranches bidimensionnelles sont les images en niveaux de gris correspondant à chaque canal de couleur (rouge, vert et bleu).
 - (b) Pour les signaux sismiques polarisés, chaque tranche bidimensionnelle correspond à une composante de polarisation.

Nous appliquons ces trois techniques de filtrage aux images en couleur et aux signaux sismiques polarisés.

4.3.2.2 Images en couleur

De manière à connaître les rangs n -modaux de façon certaine, nous prenons en compte, comme images en couleur initiales, les approximations tensorielles LRTA-(30,30,2) des images

Sailboat et Piments ainsi que des images Mondriaan1, Baboon et Lena présentées à la section 2.1. Nous considérons donc, dans la suite, que les rangs n -modaux des images initiales sont $(K_1, K_2, K_3) = (30, 30, 2)$. Les images en couleur initiales $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 3}$ de Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena sont représentées respectivement sur les Figures 4.4(b)-4.1(b).

Le bruit blanc gaussien $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 3}$ ajouté aux images initiales $\mathcal{X}$ précédemment définies est de la forme :

$$\mathcal{B} = \alpha \cdot 255 \cdot \mathcal{G}, \quad (4.53)$$

dans laquelle :

1. chaque élément de $\mathcal{G}$ est la réalisation d'un bruit blanc gaussien, centré et normé,
2. α est un paramètre permettant de régler le SNR dans l'image bruitée modélisée par le tenseur $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$
3. le terme 255 réfère au niveau de gris maximum de chacun des pixels.

Les images en couleur bruitées (correspondant au tenseur $\mathcal{R}$) relatives à Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena sont représentées respectivement sur les Figures 4.4(c)-4.1(c).

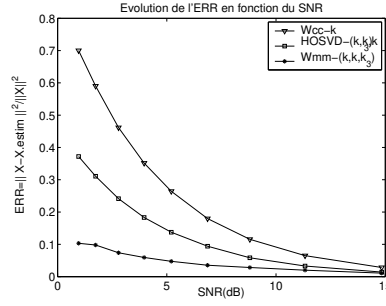
Les images en couleur obtenues par les quatre techniques de filtrage sont les suivantes :

1. Le filtrage de Wiener bidimensionnel classique (Wcc) effectué sur les images en niveaux de gris associées à chaque canal de couleur du tenseur $\mathcal{R}$ modélisant les images bruitées de Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena, aboutit aux images estimées, représentées respectivement sur les Figures 4.4(d)-4.1(d).
2. Le filtrage par ACP multimodale obtenue par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ correspondant aux images de Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena, aboutit aux images estimées, représentées respectivement sur les Figures 4.4(e) à 4.1(e).
3. Enfin, le filtrage de Wiener multimodal de rang- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ correspondant aux images de Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena, aboutit aux images représentées respectivement sur les Figures 4.4(f)-4.1(f).

L'ensemble de ces résultats montre que les images en couleur estimées par Wiener multimodal sont de meilleure qualité que celles obtenues par ACP multimodale classique et filtrage bidimensionnel de Wiener classique sur chaque canal de couleur.

Ceci est confirmé par les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du SNR pour chacun des traitements associé aux images de Piments, Sailboat, Mondriaan1, Baboon, et Lena, représentées respectivement sur les Figures 4.4(a)-4.1(a). En effet, pour chacune des images considérées, et quel que soit le SNR, l'ERR donnée par le filtrage de Wiener multimodal est toujours inférieure à celle donnée par les autres traitements.

Ainsi, nous pouvons conclure, au vu de ces résultats, que le filtrage de Wiener multimodal permet une meilleure estimation du tenseur signal $\mathcal{X}$, que l'ACP multimodale et que le filtrage de Wiener classique effectué sur chaque canal de couleur, au sens de l'ERR minimale.



(a)

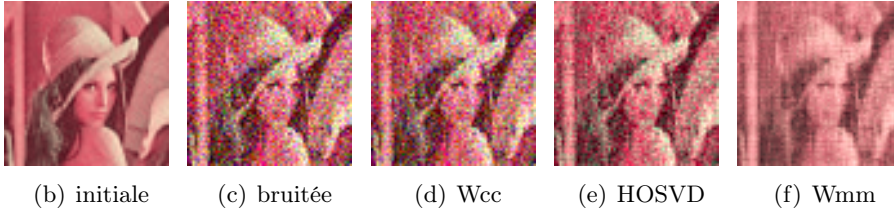
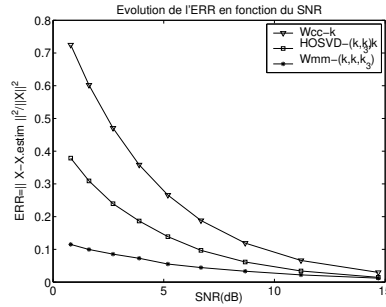


Figure 4.1 — (a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Lena bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 11.4$ dB. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).



(a)

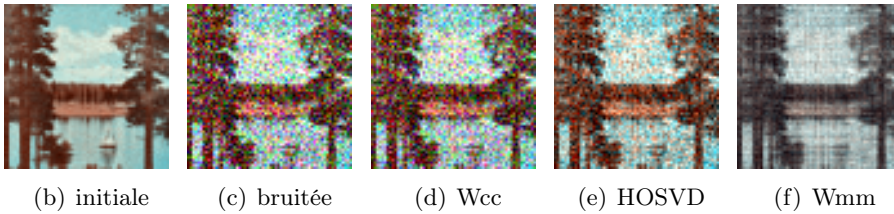


Figure 4.2 — (a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Sailboat bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 8.7$ dB. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).

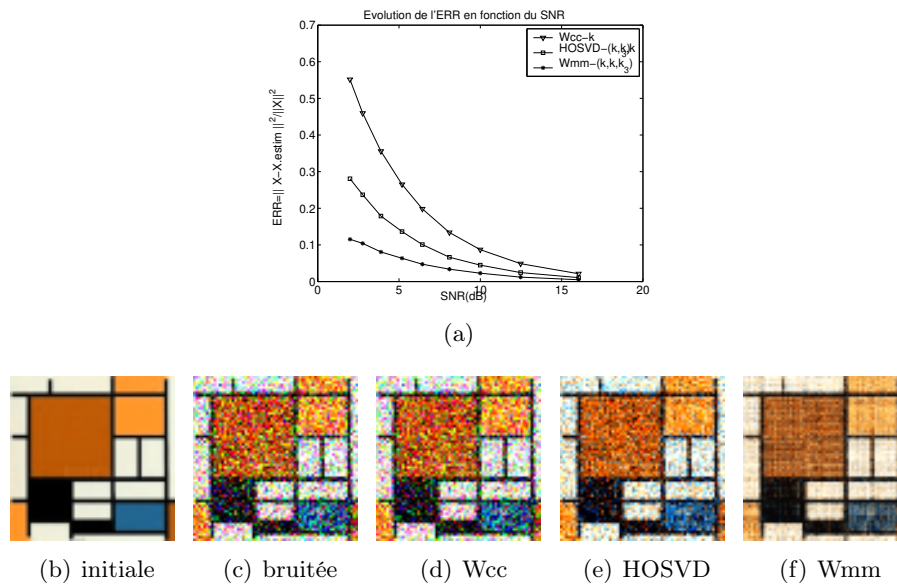


Figure 4.3 — (a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Mondrian1 bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 6.3\text{dB}$. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).

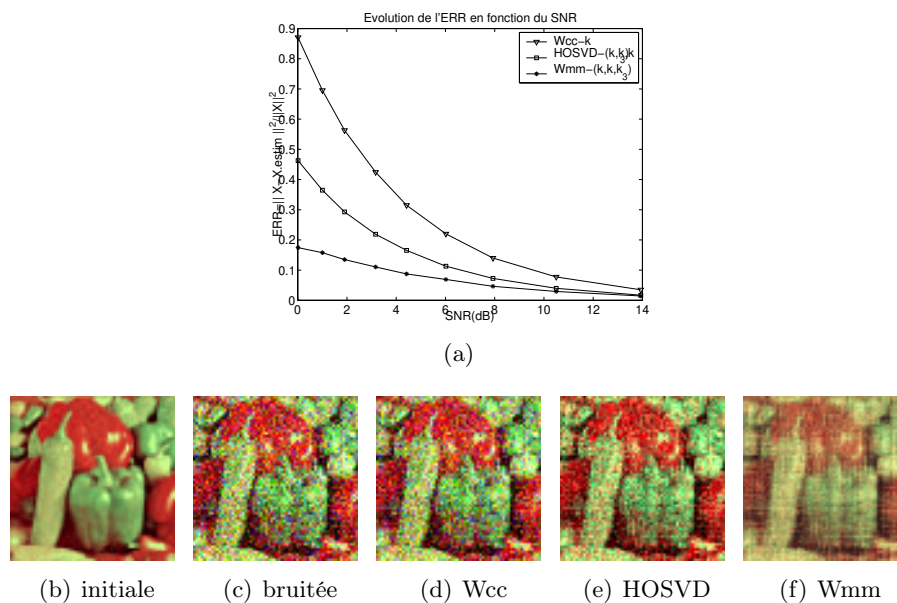
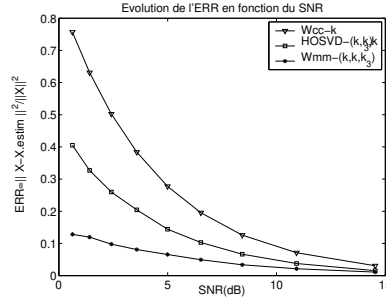


Figure 4.4 — (a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Piments bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 7.9\text{dB}$. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).



(a)

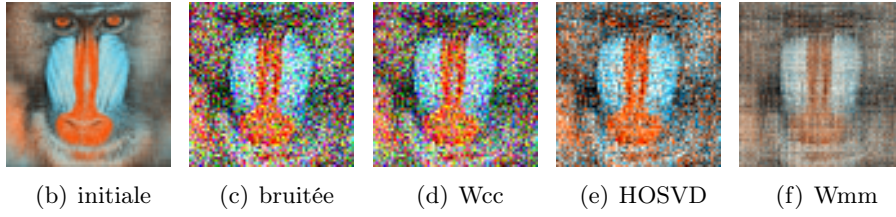


Figure 4.5 — (a) : Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Baboon bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 6.6$ dB. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).

4.3.2.3 Signal sismique multicomposantes

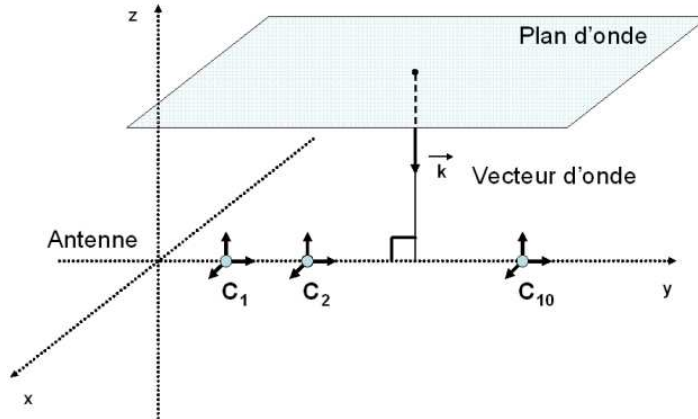


Figure 4.6 — Onde sismique plane et polarisée dont le vecteur d'onde est orthogonal au plan de l'antenne.

Considérons maintenant une « onde plane sismique polarisée » reçue par une antenne de 10 capteurs multicomposantes (Figure 4.6), dont l'échantillonnage temporel est effectué sur 200 échantillons, d'incidence orthogonale au plan de l'antenne. Comme le montre la Figure 4.7, les signaux reçus peuvent être modélisés par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{10 \times 200 \times 3}$. Les trois composantes

suivant les axes x , y et z sont représentées respectivement sur les figures 4.7(a)-4.7(c). L'onde considérée dans ces simulations présente un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ radians entre chaque composantes.

De même qu'à la relation (4.53), le bruit blanc gaussien additif est défini par :

$$\mathcal{B} = \alpha \cdot \mathcal{G}, \quad (4.54)$$

dans lequel α est un paramètre permettant de régler le SNR dans le tenseur de données bruitées $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$.

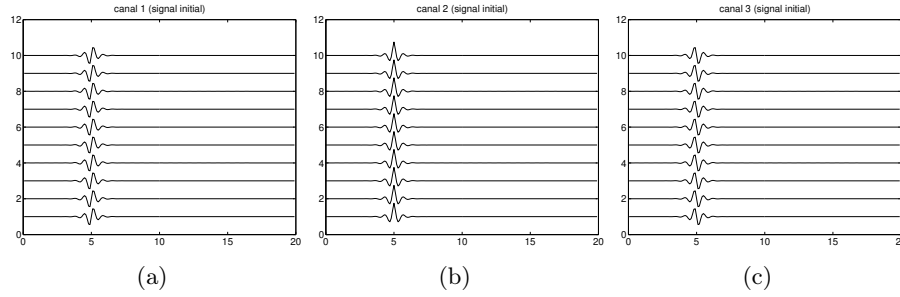


Figure 4.7 — Trois composantes d'une onde sismique plane de vecteur d'onde orthogonal au plan de l'antenne.

Les trois composantes de polarisation R_x , R_y et R_z du tenseur $\mathcal{R}$, dans lequel α est choisi de telle sorte que le SNR soit égal à $-10dB$, sont représentées respectivement sur les figures 4.9(a)-4.9(c).

Les trois composantes de polarisation $\hat{X}_x$, $\hat{X}_y$ et $\hat{X}_z$ du tenseur signal estimé $\hat{\mathcal{X}}$ par les trois techniques de filtrage sont les suivantes :

1. Les trois composantes de polarisation résultant du filtrage de Wiener bidimensionnel classique (Wcc) effectué sur chacune des trois composantes de polarisation R_x , R_y et R_z du tenseur $\mathcal{R}$ sont représentées respectivement sur les figures 4.9(d)-4.9(f).
2. Les trois composantes de polarisation résultant des filtrages par ACP multimodale obtenue par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur $\mathcal{R}$ sont représentées respectivement sur les figures 4.9(g)-4.9(i).
3. Enfin, les trois composantes de polarisation résultant du filtrage de Wiener multimodal de rang- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ sont représentés respectivement sur les figures 4.9(j)-4.9(l).

Dans ces simulations, les rangs n -modaux sont fixés à $(K_1, K_2, K_3) = (8, 8, 3)$.

Ces résultats montrent que le filtrage de Wiener multimodal permet une meilleure estimation du signal MM initial que les filtrages obtenus par ACP multimodale et traitement de Wiener bidimensionnel classique. Ceci est confirmé par les courbes d'évolution de l'ERR en fonction du SNR pour chacun des traitements, représenté sur la figure 4.8, qui montrent que, quel que soit le SNR, l'ERR donnée par le filtrage de Wiener multimodal est toujours inférieure à celle donnée par les autres traitements.

Comme dans le cas des images en couleur, nous pouvons de nouveau conclure, au vu de ces résultats, que le filtrage de Wiener multimodal permet une meilleure estimation du tenseur signal que l'ACP multimodale et que le filtrage de Wiener classique effectué sur chaque composante de polarisation, au sens de l'ERR minimale.

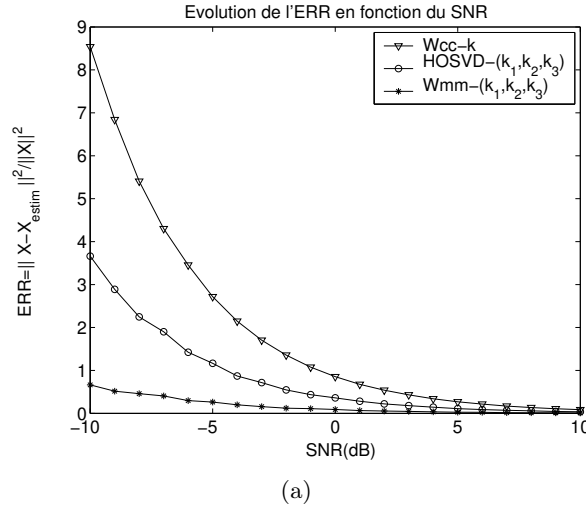


Figure 4.8 — Évolution de l'ERR en fonction du SNR pour chacune des méthodes. Rangs n -modaux $(K_1, K_2, K_3) = (8, 8, 3)$ pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) , et Wmm- (K_1, K_2, K_3) et rang $K = 8$ pour Wcc- K .

4.3.3 Conclusion sur le filtrage de Wiener multimodal

Dans la section 4.3, nous avons développé un nouveau filtrage de Wiener multimodal adapté à la nature tensorielle des données MM bruitées, sous l'hypothèse d'un bruit additif gaussien blanc.

Le filtrage de Wiener multimodal d'un tenseur de données bruitées d'ordre N , consiste à déterminer les N filtres de Wiener n -modaux optimaux, notés H_n , $n = 1, \dots, N$, qui minimisent l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré, et le tenseur signal estimé obtenu en appliquant sur chaque n -mode du tenseur de données bruitées, le filtre H_n par le biais de l'opérateur n -mode produit.

En effectuant l'hypothèse stipulant que chaque matrice dépliant du tenseur signal désiré peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base du sous-espace signal n -modal associé au tenseur de données bruitées, il est possible de déterminer l'expression théorique de chaque filtre n -modal.

Chacun de ces filtres représente, dans un n -mode particulier, une projection orthogonale pondérée. Les vecteurs orthogonaux associés à la projection sont les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance des vecteurs n -modaux du tenseur de données bruitées filtré dans le m -mode par le filtre H_m , $\forall m \neq n$. Les coefficients de la matrice de pondération dépendent de valeurs propres de cette matrice.

De même que pour la LRTA- (K_1, K_2, K_3) d'un tenseur, nous avons développé un algorithme numérique basé sur les moindres carrés alternés (ALS) permettant la détermination des filtres de Wiener n -modaux optimaux.

Les simulations de débruitage effectuées sur des images en couleur et des données sismiques multicomposantes montrent que le filtrage de Wiener multimodal améliore le filtrage par ACP

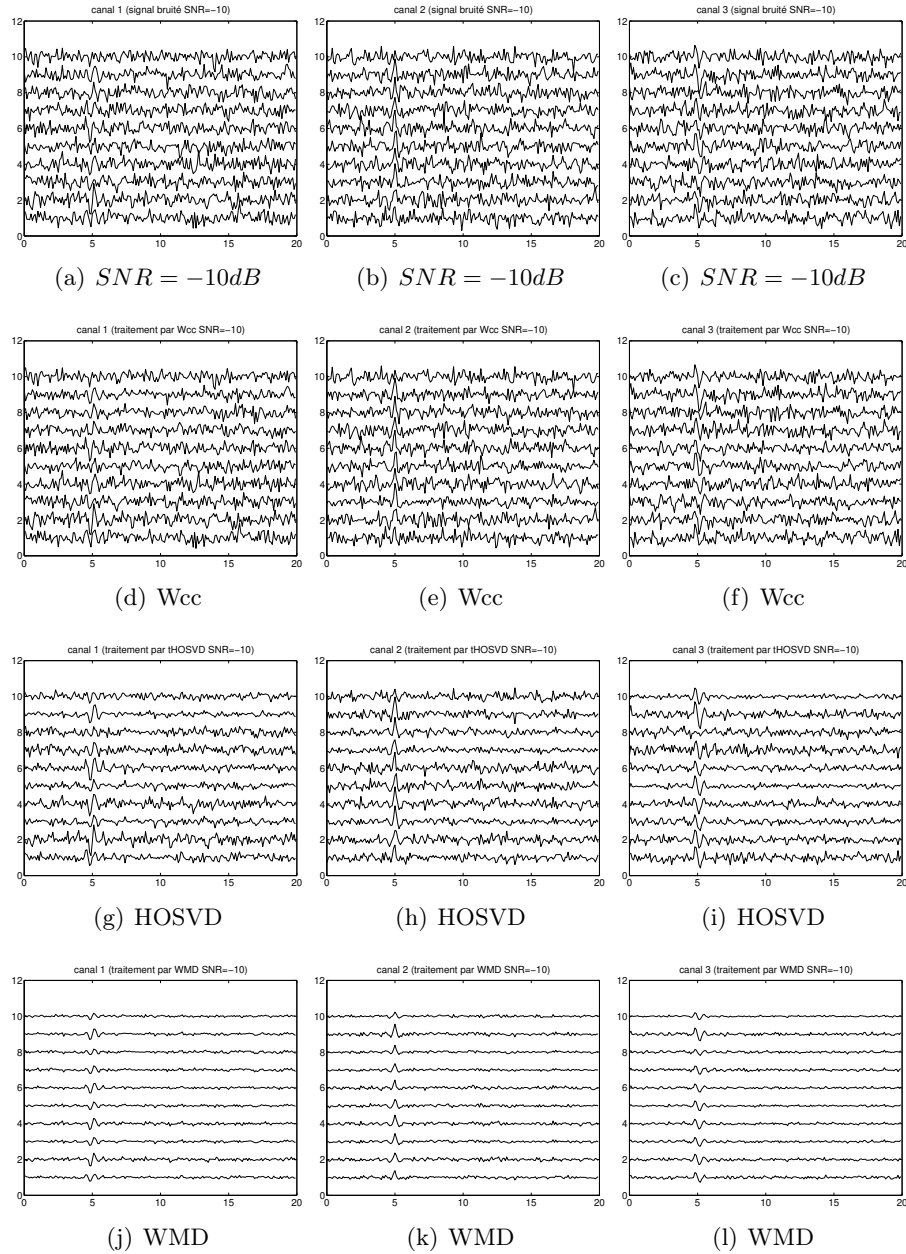


Figure 4.9 — Comparaison des méthodes de filtrage multimodal sur des données sismiques multicomposantes. Rangs n -modaux $(K_1, K_2, K_3) = (8, 8, 3)$ pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et Wmm- (K_1, K_2, K_3) , et rang $K = 8$ pour Wcc- K .

multimodale classique obtenu par HOSVD- $(K_1, K_2, K_3)^6$, lequel améliore aussi le filtrage qui consiste à appliquer un filtrage de Wiener classique sur chaque tranche bidimensionnelle issues du tenseur de données MM.

Dans la section suivante, nous considérons le cas d'un bruit additif corrélé. Dans ce contexte, nous faisons usage des statistiques d'ordre supérieur.

4.4 Cas d'un bruit additif gaussien corrélé

Dans cette section, nous proposons d'adapter le filtrage par ACP multimodale classique au cas de données bruitées par un bruit additif gaussien corrélé.

Dans un premier temps, dans la section 4.4.1, nous rappelons les principes de l'ACP multimodale donnée par la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$. Nous mettrons notamment en évidence les moments d'ordre deux sur lesquels elle est basée.

Dans la section 4.4.2, nous proposons d'améliorer l'ACP multimodale obtenue par LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, en remplaçant les moments d'ordre deux (sur lesquels elle est construite), par les cumulants d'ordre quatre.

Dans les sections 4.4.3 à 4.4.6, nous effectuons une brève présentation des cumulants d'ordre quatre (qui, par construction, sont des tenseurs d'ordre quatre [38, 16]), et présentons une manière de généraliser l'analyse en éléments propres de la matrice de covariance impliquée dans l'ACP multimodale classique aux cumulants d'ordre quatre. Nous montrerons enfin comment l'utilisation d'une matrice « tranche de cumulant » d'ordre quatre permet d'obtenir sensiblement les mêmes résultats qu'avec le cumulant d'ordre quatre tout en diminuant la charge de calcul inhérente à l'utilisation de ce dernier.

Dans la section 4.4.7, nous présentons le nouvel algorithme effectuant l'ACP multimodale basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre.

Enfin, dans la section 4.4.8, nous appliquons cet algorithme au cas du débruitage d'images en couleur et de données sismiques multicomposantes bruitées par un bruit additif gaussien corrélé. Nous comparons ces résultats avec ceux donnés par le filtrage multimodal classique obtenue par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) [39, 40].

4.4.1 Moments d'ordre 2 dans l'ACP multimodale obtenue par LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$

Dans la section 1.4.6, nous avons rappelé comment la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ constitue une ACP multimodale. Nous avons montré comment la matrice :

$$C_k^{(n)} = B_{k,n}^{(n)} R_n^T, \quad (4.55)$$

dans laquelle $B_{k,n}^{(n)} = R_n(P_{k+1}^{(1)} \otimes \dots \otimes P_{k+1}^{(n-1)} \otimes P_k^{(n+1)} \dots \otimes P_k^{(N)})$, définie par la relation (1.49) et calculée à l'étape 2(a)iii de l'algorithme TUCKALS3⁷ représente, à un facteur multiplicatif

⁶Nous rappelons que la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est une forme approximée de la LRTA- (K_1, K_2, K_3) qui effectue de façon rigoureuse l'ACP multimodale.

⁷Voir section 1.4.4

près, la matrice de covariance entre les vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{B}_{k,n}^{(n)}$, et les vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{R}$. En effet, $C_k^{(n)}$ peut être réécrite sous la forme :

$$C_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbf{b}_j \mathbf{r}_j^T, \quad (4.56)$$

dans laquelle $\{\mathbf{b}_j^{(n)}, j = 1, \dots, M_n\}$ et $\{\mathbf{r}_j^{(n)}, j = 1, \dots, M_n\}$ sont les vecteurs n -modaux de $\mathcal{B}_{k,n}^{(n)}$ et $\mathcal{R}$, et $M_n = I_1 \cdots I_{n-1} I_{n+1} \cdots I_N$. Ainsi, dans la $k^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme TUCKALS3, le projecteur orthogonal $P_k^{(n)}$ sur le sous-espace signal n -modal est estimé à partir d'un moment d'ordre deux.

4.4.2 Méthode proposée : amélioration de l'algorithme TUCKALS3 par les cumulants d'ordre 4

En pratique, l'hypothèse de blancheur du bruit n'est pas toujours respectée. Par conséquent, en présence d'un bruit additif gaussien corrélé, l'estimation du projecteur orthonormal $P_k^{(n)}$ sur le sous-espace signal n -modal par ACP multimodale ne peut pas être correctement effectuée par l'algorithme TUCKALS3, car celui-ci repose par construction sur les moments d'ordre deux.

Dans le cas d'un bruit additif gaussien corrélé, une façon d'améliorer l'estimation du projecteur $P_k^{(n)}$ est de remplacer, dans l'étape 2(a)iii de l'algorithme TUCKALS3, la matrice de covariance $C_k^{(n)}$ par un cumulant d'ordre supérieur. En effet, compte-tenu du fait que les moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire suivant une loi gaussienne sont nuls [38, 50], les statistiques d'ordre supérieur constituent un outil classiquement utilisé pour éliminer les composantes gaussiennes du bruit.

Le but de la méthode proposée est donc d'estimer le projecteur orthonormal $P_{k+1}^{(n)}$ sur le sous-espace signal n -modal à partir des cumulants d'ordre quatre des vecteurs n -modaux $\{\mathbf{b}_j^{(n)}, j = 1, \dots, M_n\}$ et $\{\mathbf{r}_j^{(n)}, j = 1, \dots, M_n\}$, au lieu de la matrice de covariance $C_k^{(n)}$ correspondante.

4.4.3 Rappel sur les cumulants d'ordre 4

Le cumulant d'ordre 4 des vecteurs aléatoires $\mathbf{b}^{(n)}$ et $\mathbf{r}^{(n)}$ est défini par :

$$\mathcal{C}_k^{(n)} = \text{Cum} \left[\mathbf{b}^{(n),k}, \mathbf{b}^{(n),k^T}, \mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)T} \right], \quad (4.57)$$

dans lequel $\text{Cum}(\cdot)$ est l'opérateur de cumulant [38, 50]. $\mathcal{C}^{(n),k} \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n \times I_n \times I_n}$ est un tenseur super-symétrique [16, 17] d'ordre 4 dont le terme générique à la position (i_1, i_2, j_1, j_2) est donné par :

$$\left(\mathcal{C}_k^{(n)} \right)_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \text{Cum} \left[b_{i_1}^{(n),k}, b_{i_2}^{(n),k}, r_{j_1}^{(n)}, r_{j_2}^{(n)} \right], \quad (4.58)$$

dans lequel $b_i^{(n),k}$ et $r_j^{(n)}$ sont les $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ composantes des vecteurs aléatoires $\mathbf{b}^{(n),k}$ et $\mathbf{r}^{(n)}$, associés respectivement au n -mode des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$. D'après [38, 50], le terme

générique de $\mathcal{C}^{(n),k}$ peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur d'espérance mathématique, pour des variables aléatoires centrées, par :

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{C}_k^{(n)}\right)_{i_1, i_2, j_1, j_2} &= \mathbb{E} \left[b_{i_1}^{(n),k} b_{i_2}^{(n),k} r_{j_1}^{(n)} r_{j_2}^{(n)} \right] \\ &- \mathbb{E} \left[b_{i_1}^{(n),k} r_{j_1}^{(n)} \right] \mathbb{E} \left[b_{i_2}^{(n),k} r_{j_2}^{(n)} \right] - \mathbb{E} \left[b_{i_1}^{(n),k} b_{i_2}^{(n),k} \right] \mathbb{E} \left[r_{j_1}^{(n)} r_{j_2}^{(n)} \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Enfin, en considérant les M_n réalisations des vecteurs aléatoires $\mathbf{b}^{(n),k}$ et $\mathbf{r}^{(n)}$, l'estimation pratique du terme $\mathcal{C}_{i_1, i_2, j_1, j_2}^{(n),k}$ s'effectue à partir des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$, en calculant l'expression :

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{C}_k^{(n)}\right)_{i_1, i_2, j_1, j_2} &= \frac{1}{M_n} \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{i_1 p}^{(n),k} b_{i_2 p}^{(n),k} r_{j_1 p}^{(n)} r_{j_2 p}^{(n)} \right) \\ &- \frac{1}{M_n^2} \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{i_1 p}^{(n),k} r_{j_1 p}^{(n)} \right) \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{i_2 p}^{(n),k} r_{j_2 p}^{(n)} \right) - \frac{1}{M_n^2} \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{i_1 p}^{(n),k} b_{i_2 p}^{(n),k} \right) \left(\sum_{p=1}^{M_n} r_{j_1 p}^{(n)} r_{j_2 p}^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (4.60)$$

dans laquelle $b_{ij}^{(n),k}$ et $r_{ij}^{(n)}$ sont les éléments à la position (i, j) des matrices $B_n^{(n),k}$ et R_n , dépliantes dans le n -mode des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$.

4.4.4 Approximation de rang inférieur du cumulants d'ordre 4

À l'étape 2(a)iv de l'algorithme TUCKALS3, la détermination des K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice $\mathcal{C}_k^{(n)}$, revient à calculer (d'après le théorème d'Eckart-Young [20]) la meilleure approximation de rang- K_n inférieur de la matrice $\mathcal{C}_k^{(n)}$ au sens des moindres carrés.

D'après [16, 17], une façon de généraliser l'approximation de rang- K_n inférieur de la matrice $\mathcal{C}_k^{(n)}$ au cumulants d'ordre 4 est de calculer l'approximation de rang- (K_n, K_n, K_n, K_n) inférieur du tenseur $\mathcal{C}_k^{(n)}$ grâce à l'algorithme TUCKALS3. En utilisant le fait que $\mathcal{C}_k^{(n)}$ est un tenseur hyper-symétrique, sa décomposition de TUCKER3 de paramètres (K_n, K_n, K_n, K_n) , ou, en d'autres termes, l'approximation de rang- (K_n, K_n, K_n, K_n) inférieur du tenseur $\mathcal{C}_k^{(n)}$, peut s'écrire :

$$\mathcal{C}_k^{(n)} = \mathcal{S}_{K_n}^{(n),k} \times_1 U_{k+1}^{(n)} \times_2 U_{k+1}^{(n)} \times_3 U_{k+1}^{(n)} \times_4 U_{k+1}^{(n)}, \quad (4.61)$$

dans laquelle $\mathcal{S}_{K_n}^{(n),k} \in \mathbb{R}^{K_n \times K_n \times K_n \times K_n}$ est le tenseur noyau de TUCKER3 [35, 34, 16, 17], et $U_{k+1}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times K_n}$ est une matrice orthonormale⁸ que nous pourrions nommer « matrice propre n -modale ». En se basant sur cette propriété, un algorithme TUCKALS3 rapide adapté aux tenseurs hyper-symétriques a été proposé dans [18]. Cette méthode est aussi définie sous le nom de HOPM⁹, ou méthode de la puissance d'ordre supérieur, adaptée aux tenseurs hyper-symétriques.

Une bonne approximation de la matrice $U_{k+1}^{(n)}$ impliquée dans la LRTA- (K_n, K_n, K_n, K_n) du tenseur $\mathcal{C}_k^{(n)}$ consiste à considérer la matrice des K_n premiers vecteurs de la matrice unitaire $V_{k+1}^{(n)}$ impliquée dans la HOSVD du tenseur $\mathcal{C}_k^{(n)}$, et obtenue dans la relation (4.61)

⁸ $U_{k+1}^{(n)} U_{k+1}^{(n)T} = \mathbf{I}_{K_n \times K_n}$

⁹Higher Order Power Method.

lorsque $K_n = I_n$. C'est ce que nous avons appelé jusqu'à présent la troncature de rang- (K_n, K_n, K_n, K_n) de la HOSVD de $\mathcal{C}_k^{(n)}$.

La HOSVD- (K_n, K_n, K_n, K_n) de $\mathcal{C}_k^{(n)}$ n'est pas la meilleure approximation de rang- (K_n, K_n, K_n, K_n) inférieur du tenseur $\mathcal{C}_k^{(n)}$ au sens des moindres carrés [16, 17]. En effet, celle-ci constitue l'étape d'initialisation de l'algorithme TUCKALS3 qui permet d'atteindre l'approximation optimale du tenseur. Cependant, au vu des simulations que nous avons effectuées au chapitre 2 et des travaux [16, 17, 59], l'erreur commise lors de la minimisation de $\|\mathcal{C}_k^{(n)} - \mathcal{B}\|^2$ (cf. relation (1.37)), $\mathcal{B}$ étant un tenseur de rang- (K_n, K_n, K_n, K_n) , est faible comparée au gain en temps de calcul que l'on obtient en évitant la boucle ALS de l'algorithme TUCKALS3.

Le principal inconvénient de cette méthode reste la charge de calcul importante inhérente à la construction du cumulante d'ordre quatre $\mathcal{C}_k^{(n)}$ associé à chacun des n -modes du tenseur de données $\mathcal{R}$. Cette charge de calcul dépend de la taille de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire de I_n , $\forall n = 1, \dots, N$. Une façon de réduire le temps de calcul est d'utiliser une matrice « tranche de cumulante » extraite du cumulante d'ordre quatre. Ceci est réalisé à la section suivante.

4.4.5 Matrice tranche de cumulante d'ordre 4

En traitement d'antenne, un grand nombre d'applications [66, 94, 64, 65, 84, 52] font l'usage de la matrice des cumulants d'ordre quatre obtenue en réarrangeant sous une forme matricielle le tenseur représentant le cumulante d'ordre quatre. Afin de réduire le temps de calcul nécessaire à la construction de la matrice des cumulants d'ordre quatre (qui est le même que celui nécessaire à la construction du tenseur cumulante d'ordre quatre), l'utilisation d'une matrice représentant une tranche du cumulante d'ordre quatre a été proposée [5, 93, 94].

Selon les travaux [5, 93, 94], la matrice tranche de cumulante associée à $q^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\mathbf{b}^{(n),k}$ peut être définie par la matrice hermitienne, de taille $(I_n \times I_n)$, suivante :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k} = \text{Cum} \left[b_q^{(n),k}, b_q^{(n),k}, \mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)T} \right], \quad (4.62)$$

dans laquelle $b_q^{(n),k}$ est la $q^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\mathbf{b}^{(n),k}$. Le terme générique à la position (i, j) de la matrice tranche de cumulante $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$ s'exprime, à l'aide de l'opérateur d'espérance mathématique, par :

$$\left(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k} \right)_{ij} = \text{E} \left[(b_q^{(n),k})^2 r_i^{(n)} r_j^{(n)} \right] - 2 \text{E} \left[b_q^{(n),k} r_i^{(n)} \right] \text{E} \left[b_q^{(n),k} r_j^{(n)} \right]. \quad (4.63)$$

De même qu'à la relation (4.60), l'estimation pratique des termes de la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$ s'effectue grâce aux M_n réalisations des vecteurs aléatoires $\mathbf{b}^{(n),k}$ et $\mathbf{r}^{(n)}$, c'est-à-dire grâce aux tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$, par :

$$\left(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k} \right)_{ij} = \frac{1}{M_n} \left(\sum_{p=1}^{M_n} (b_{qp}^{(n),k})^2 r_{ip}^{(n)} r_{jp}^{(n)} \right) - \frac{2}{M_n^2} \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{qp}^{(n),k} r_{ip}^{(n)} \right) \left(\sum_{p=1}^{M_n} b_{qp}^{(n),k} r_{jp}^{(n)} \right), \quad (4.64)$$

dans lequel $b_{ij}^{(n),k}$ et $r_{ij}^{(n)}$ sont les éléments à la position (i, j) des matrices $B_n^{(n),k}$ et R_n , dépliantes dans le n -mode des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$.

4.4.6 Apport de la matrice tranche de cumulant par rapport au tenseur cumulant d'ordre 4

4.4.6.1 Gain en temps de calcul

Le gain en temps de calcul apporté par l'utilisation de la matrice tranche de cumulant plutôt que le tenseur du cumulant d'ordre quatre peut s'expliquer par au moins deux raisons.

Premièrement, étant donné que le tenseur du cumulant d'ordre quatre dans le n -mode est constitué de I_n^4 éléments, le nombre d'opérations nécessaires à sa construction est le carré de celui nécessaire à la construction d'une matrice tranche de cumulant. De plus, selon la taille du tenseur de données, l'espace mémoire occupé par le tenseur du cumulant d'ordre quatre n -modal peut devenir trop important pour un ordinateur classique.

Deuxièmement, l'estimation du projecteur sur le sous-espace signal n -modal nécessite seulement une décomposition en valeurs propres (EVD) lorsque la matrice tranche de cumulant est utilisée, alors que $4k_{\text{stop}}$ SVD sont nécessaires à l'estimation de ce projecteur lorsque le tenseur du cumulant d'ordre 4 est utilisé, k_{stop} étant le nombre de boucles ALS nécessaires à la convergence de l'algorithme TUCKALS3 impliqué dans l'approximation LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ du tenseur du cumulant d'ordre 4.

Notons néanmoins que, dans la construction des projecteurs sur les sous-espaces signal n -modaux, la détermination des vecteurs propres (ou vecteurs singuliers) associés aux plus grandes valeurs propres (ou singulières), peut être accélérée à l'aide d'algorithmes rapides tels que la Méthode de la Puissance [23] (pour la matrice tranche de cumulant) ou la méthode de la puissance d'ordre supérieure connue sous le terme HOPM [16, 18] (pour le tenseur du cumulant d'ordre quatre).

4.4.6.2 Similitude des résultats apportés par les filtrages basés sur le cumulant global et la tranche de cumulant

La matrice tranche de cumulant d'ordre quatre a initialement été introduite en traitement d'antenne pour réduire le temps de calcul associé à la localisation de sources [5, 93, 94]. Les résultats obtenus dans ces études stipulent que l'utilisation de la matrice tranche de cumulant par rapport au tenseur du cumulant d'ordre quatre offre un bon compromis entre la précision de la localisation et la charge de calcul qui lui est associée [66].

Le but de notre étude est d'améliorer le filtrage par ACP multimodale obtenue par la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ des données MM bruitées, notamment dans le cas d'un bruit additif gaussien corrélé. Nous montrons à la section 4.4.8, sur les figures 4.10(a), 4.11(a) et 4.13(a), que les filtrages par ACP multimodale améliorée, basés respectivement sur le tenseur du cumulant d'ordre quatre et sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre, donnent sensiblement les mêmes résultats.

Par conséquent, en se basant sur les résultats obtenus en traitement d'antenne [5, 93, 94], et sur les simulations de la section 4.4.8 concernant le filtrage d'images en couleur et de données sismiques polarisées, nous avons utilisé la matrice tranche de cumulant afin de réduire la charge de calcul impliquée dans le filtrage par ACP multimodale amélioré par les cumulants d'ordre quatre.

Nous considérons dans la suite, au vu de ces résultats, que les vecteurs propres associés

aux valeurs propres les plus grandes de la matrice tranche de cumulant $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$ constituent une bonne approximation des vecteurs de base du sous-espace signal n -modal. Notons que ceci n'est vérifié que si la densité de probabilité associée au vecteur aléatoire $\mathbf{x}^{(n)}$ associé au n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$ n'est pas gaussienne.

Dans la section suivante, nous résumons l'algorithme proposé.

4.4.7 Algorithme proposé

La méthode proposée est une adaptation du filtrage par ACP multimodale classique au cas du bruit additif gaussien corrélé.

À l'étape 2(a)ii, et la $k^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme TUCKALS3, la matrice de covariance $\mathbf{C}_k^{(n)}$ entre les vecteurs n -modaux des tenseurs $\mathcal{B}^{(n),k}$ et $\mathcal{R}$ est remplacée par $q^{\text{ième}}$ la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$ définie à la relation (4.64). Dans cette expression, l'indice q représente la $q^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\mathbf{b}^{(n),k}$ (associé au n -mode du tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$), et est fixé de telle sorte que $q \in \{1, \dots, I_n\}$.

À l'étape 2(a)v, le projecteur orthonormal $P_{k+1}^{(n)}$ est donc le projecteur sur les K_n vecteurs propres associés aux K_n plus grandes valeurs propres de la matrice tranche de cumulant $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$.

L'étape d'initialisation de l'algorithme TUCKALS3 est aussi modifiée en utilisant la matrice tranche de cumulant. La matrice $U_0^{(n)}$ avec laquelle est construit le projecteur $P_0^{(n)} = U_0^{(n)} U_0^{(n)T}$, est la matrice des K_n vecteurs singuliers associés aux K_n plus grandes valeurs singulières de la dépliante R_n dans le n -mode. Par construction, la matrice $U_0^{(n)}$ est la matrice des vecteurs propres de la matrice hermitienne $R_n R_n^T$ qui, peut être considérée, à un facteur multiplicatif près, comme une estimation de la matrice de covariance des vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{R}$. Dans l'étape d'initialisation de la méthode proposée, la matrice $R_n R_n^T$ est remplacée par la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),0}$ des vecteurs n -modaux du tenseur $\mathcal{R}$. $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),0}$ est estimée grâce à la relation (4.64) en fixant $q \in \{1, \dots, I_n\}$, et en remplaçant le terme $b_{qp}^{(n),k}$ par le terme $r_{qp}^{(n)}$, $\forall p = 1, \dots, M_n$.

L'algorithme de filtrage par ACP multimodale améliorée, basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre, se résume dans les étapes suivantes :

1. Entrée : tenseur de données $\mathcal{R} = \mathcal{B}_0$.

Initialisation de l'algorithme ($k = 0$), $\forall n = 1, \dots, N$:

- (a) Calculer $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),0}$, la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre associée aux vecteurs n -modaux de $\mathcal{R}$ en utilisant la relation (4.64), dans laquelle $q \in \{1, \dots, I_n\}$ est fixé, et le terme $b_{qp}^{(n),k}$ est remplacé par le terme $r_{qp}^{(n)}$, $\forall p = 1, \dots, M_n$;
- (b) Procéder à l'EVD de $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),0}$;
- (c) Former la matrice orthonormale $U_0^{(n)}$ contenant les K_n vecteurs propres associés aux K_n valeurs propres les plus grandes de la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),0}$;
- (d) Former le projecteur orthonormal $P_0^{(n)} = U_0^{(n)} U_0^{(n)T}$.
- (e) Calculer $\mathcal{B}_1 = \mathcal{R} \times_1 P_0^{(1)} \cdots \times_N P_0^{(N)}$;

2. Boucle ALS :

Répéter jusqu'à convergence, c'est-à-dire, par exemple, tant que $\|\mathcal{B}_{k+1} - \mathcal{B}_k\|^2 > \epsilon$, $\epsilon > 0$ étant un seuil fixé *a priori*,

(a) Pour $n = 1$ à N :

- i. Former $\mathcal{B}^{(n),k} = \mathcal{R} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \cdots \times_{n-1} P_{k+1}^{(n-1)} \times_{n+1} P_k^{(n+1)} \cdots \times_N P_k^{(N)}$;
- ii. Calculer $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$, la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre des vecteurs n -modaux des tenseurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}^{(n),k}$, en utilisant la relation (4.64), dans laquelle $q \in \{1, \dots, I_n\}$ est fixé;
- iii. Procéder à l'EVD de $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$;
- iv. Former la matrice orthonormale $U_k^{(n)}$ contenant les K_n vecteurs propres associés aux K_n valeurs propres les plus grandes de la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{(n),k}$;
- v. Calculer le projecteur orthonormal $P_{k+1}^{(n)} = U_{k+1}^{(n)} U_{k+1}^{(n)T}$;

(b) Calculer $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{R} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \cdots \times_N P_{k+1}^{(N)}$;(c) Incrémenter k : $k \leftarrow k + 1$.3. Sortie : $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{B}_{k_{stop}} = \mathcal{R} \times_1 P_{k_{stop}}^{(1)} \cdots \times_N P_{k_{stop}}^{(N)}$, dans lequel k_{stop} est l'indice de la dernière itération après convergence de l'algorithme.

Dans la section suivante, nous utilisons cet algorithme pour l'estimation du tenseur signal $\hat{\mathcal{X}}$ à partir de données MM $\mathcal{R}$ associées à des images en couleur et des signaux sismiques polarisés, bruités par un bruit additif gaussien corrélé.

4.4.8 Simulations et résultats

De même que dans la section précédente, les simulations de cette section sont effectuées sur des images en couleur et un signal sismique polarisé modélisés par un tenseur d'ordre trois. Nous considérons comme critère d'évaluation de la qualité de l'estimation $\hat{\mathcal{X}}$ obtenue grâce au filtrage par ACP multimodale amélioré au moyen des cumulants d'ordre quatre, l'ERR précédemment définie pour le filtrage de Wiener multimodal à la relation (4.52).

Nous proposons de comparer (en se basant sur le critère de l'ERR) les trois techniques de filtrage suivantes :

1. Le filtrage par ACP multimodale classique obtenue par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruités $\mathcal{R}$ [39].
2. Le filtrage par ACP multimodale amélioré au moyen de la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre. Dans cette méthode, chaque projecteur sur le sous-espace signal n -modal est obtenu en effectuant l'approximation matricielle de rang- K_n inférieur de la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre. Cette méthode est notée par « LRТА- $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ ».
3. Le filtrage par ACP multimodale amélioré au moyen du tenseur du cumulant d'ordre quatre. Dans cette méthode, chaque projecteur sur le sous-espace signal n -modal est obtenu en effectuant l'approximation tensorielle LRТА- (K_n, K_n, K_n, K_n) du tenseur du cumulant d'ordre quatre. Cette méthode est notée par « LRТА- $\mathcal{C}$ ».

Remarque - Le cas du filtrage d'un tenseur de données bruité $\mathcal{R}$ par un bruit additif gaussien *blanc* a été traité dans la section précédente, dans laquelle une solution optimale du filtrage de Wiener multimodal a été proposée. Les statistiques d'ordre deux impliquées dans le filtrage par ACP multimodale classique sont suffisantes pour éliminer le bruit additif gaussien blanc. Dans ce cas, l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur n'apporte théoriquement aucune amélioration par rapport au filtrage basé sur les statistiques d'ordre deux. Nous présentons donc, ici, uniquement les améliorations apportées par le filtrage par ACP multimodale basée sur les statistiques d'ordre quatre, dans le cas d'un bruit additif gaussien *corrélé*. Notre attention se porte particulièrement sur le filtrage multimodal par LRTA- $\mathbf{C}_q$.

Modélisons tout d'abord le bruit additif gaussien corrélé considéré dans nos simulations.

4.4.8.1 Bruit additif gaussien corrélé

Considérons un tenseur signal $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. Nous pouvons modéliser le bruit gaussien corrélé à partir du bruit gaussien, blanc et indépendant du signal, défini précédemment à la relation (4.54) par :

$$\mathcal{B} = \alpha \cdot \mathcal{G}, \quad (4.65)$$

dans lequel chaque élément de $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ est la réalisation d'un bruit blanc gaussien, centré et normé, et α est un paramètre permettant de régler le SNR dans le tenseur de données bruitées $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$.

Un bruit gaussien corrélé $\mathcal{B}^c$ peut être construit à partir du bruit blanc ainsi défini, en appliquant sur chacun des n -modes du tenseur $\mathcal{B}$ une matrice de pondération $W^{(n)}$:

$$\mathcal{B}^c = \mathcal{B} \times_1 W^{(1)} \times_2 W^{(2)} \times_3 W^{(3)}. \quad (4.66)$$

Chaque élément du tenseur $\mathcal{B}^c$ donné par :

$$b_{i_1 i_2 i_3}^c = \sum_{k_1=1}^{I_1} \sum_{k_2=1}^{I_2} \sum_{k_3=1}^{I_3} b_{i_1 i_2 i_3} w_{i_1 k_1}^{(1)} w_{i_2 k_2}^{(2)} w_{i_3 k_3}^{(3)}, \quad (4.67)$$

est une combinaison linéaire de tous les éléments du tenseur $\mathcal{B}$, ce qui crée par construction la corrélation entre tous les modes du tenseur $\mathcal{B}^c$.

4.4.8.2 Images en couleur

Dans cette section, nous effectuons nos simulations sur les images de référence Lena¹⁰ et Baboon¹¹. De même que dans la section 4.3.2.2, nous prenons en compte l'approximation tensorielle LRTA-(20,20,2) de ces images comme images initiales, de manière à connaître leurs rangs n -modaux de façon certaine.

Les images et courbes présentées sont les suivantes :

1. Les images en couleur initiales considérées sont modélisées par un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{64 \times 64 \times 3}$, et représentent la LRTA-(20,20,2) des tenseurs associés aux images de Lena et de Baboon, et sont représentées sur les Figures 4.10(b) et 4.11(b). Ainsi, les rangs n -modaux des tenseurs associés aux images initiales sont connues et fixées à $(K_1, K_2, K_3) = (20, 20, 2)$.

¹⁰Figure 2.7(a).

¹¹Figure 2.7(b).

2. Les images en couleur bruitées correspondant aux images initiales de Lena et de Baboon (modélisées par le tenseur $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}$) dans lequel :
 - (a) $\mathcal{B}$ est un bruit gaussien *corrélé* défini à la relation (4.66),
 - (b) et le coefficient α est choisi de telle sorte que le SNR dans l'image de Lena bruitée est 8.8dB, et que le SNR dans l'image de Baboon bruitée est 3.3dB,
 sont représentées respectivement sur les Figures 4.10(c) et 4.11(c).
3. Les images résultant du filtrage par ACP multimodale classique (obtenue par HOSVD-(20, 20, 2) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$ correspondant aux images de Lena et de Baboon) sont représentées respectivement sur les Figures 4.10(d) et 4.11(d).
4. Les images résultant du filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA-(20, 20, 2) basé sur le cumulante d'ordre quatre (LRTA- $\mathcal{C}$) des images de Lena et Baboon sont représentées respectivement sur les Figures 4.10(e) et 4.11(e)
5. Les images résultant du filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA-(20, 20, 2) basé sur la matrice tranche de cumulante d'ordre quatre (LRTA- $\mathbf{C}_1$) des images de Lena et Baboon sont représentées respectivement sur les Figures 4.10(f) et 4.11(f). Dans cette simulation, la matrice tranche de cumulante d'ordre quatre $\mathbf{C}_q^{(n),k}$ est calculée de telle sorte que, $\forall n = 1, 2, 3$, l'indice de l'élément de référence $q = 1$.
6. Enfin, l'évolution de l'ERR en fonction du SNR pour les trois techniques de filtrage est représentée respectivement sur la Figure 4.10(a) pour l'image de Lena et sur la Figure 4.11(a) pour l'image de Baboon.

Les conclusions que nous pouvons tirer de ces résultats sont les suivantes :

1. Les deux dernières Figures 4.10(a) et 4.11(a) montrent tout d'abord que pour les deux images considérées, et pour l'ensemble des SNR considérés variant de $-2, 5\text{dB}$ à 22dB , les ERR données par :
 - (a) le filtrage par ACP multimodale basé sur la LRTA- $\mathbf{C}_1$ (carrés),
 - (b) et par le filtrage par ACP multimodale basé sur la LRTA- $\mathcal{C}$ (étoiles),
 sont quasiment identiques. Ceci est confirmé par la similitude des images 4.10(e) et 4.10(f) pour Lena et 4.11(e) et 4.11(f) pour Baboon, obtenues par ces deux filtres.
2. Cependant, le principal résultat que nous devons retenir des Figures 4.10(a) et 4.11(a) est que, pour les deux images considérées et sur l'ensemble des SNR (variant de $-2, 5\text{dB}$ à 22dB), l'ERR donnée par le filtrage par ACP multimodale basé sur la LRTA- $\mathbf{C}_1$ (carré) est nettement inférieure à celle obtenue par ACP multimodale classique (cercle). Ce résultat est confirmé par la bonne qualité des images 4.10(f) et 4.11(f) par rapport aux images 4.10(d) et 4.11(d).

Ainsi, dans le cas d'un bruit additif gaussien corrélé, au vu de ces simulations, le filtrage par ACP multimodale basé sur la LRTA- $\mathbf{C}_1$ permet une meilleure estimation du tenseur signal que le filtrage par ACP multimodale classique obtenu par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur de données bruitées $\mathcal{R}$, au sens de l'ERR minimum.

Ces résultats sont confirmés dans les expériences suivantes conduites sur un signal sismique multicomposantes.

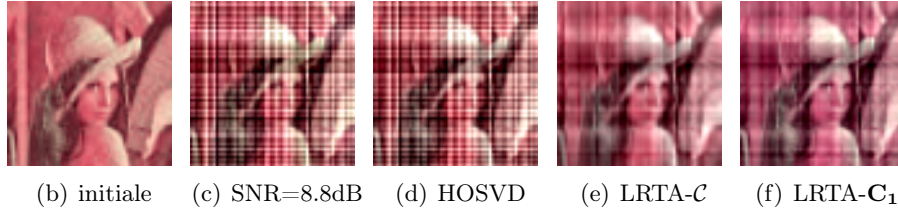
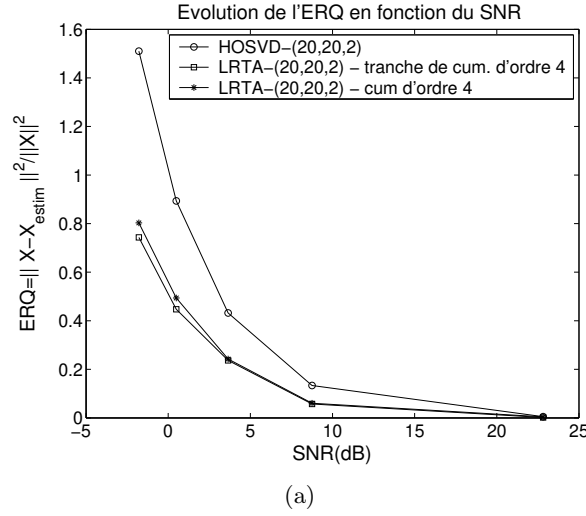


Figure 4.10 — (a) : Évolution de l'ERR en fonction du SNR (dB). (b) : Image initiale, LRTA-(20,20,2) de Lena. (c) : Image bruitée par un bruit additif gaussien corrélé (SNR=8.8dB). (d) : Filtrage ACP multimodal classique par HOSVD-(20,20,2). (e) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur le cumulatif d'ordre 4 (LRTA-C). (f) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur la matrice tranche cumulatif d'ordre 4 (LRTA-C₁).

4.4.8.3 Signal sismique multicomposantes

Dans ces simulations, comme dans la section 4.3.2.3 concernant le filtrage de Wiener multimodal, nous considérons un signal sismique polarisé reçu par une antenne de 10 capteurs multidimensionnels, et dont l'échantillonnage temporel est effectué sur 200 échantillons. Ce signal représente une onde sismique polarisée plane dont le vecteur d'onde est orthogonal au plan de l'antenne (cf. Figure 4.6). Elle est modélisée par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{10 \times 200 \times 3}$. Les trois composantes de polarisation suivant les axes x , y et z sont représentées respectivement sur les Figures 4.13(b)-4.13(d). Le signal considéré sur chaque composante correspond à une impulsion dirac $\alpha\delta(t)$, dans laquelle l'amplitude α varie en fonction de la composante de polarisation.

Exemple 1 - Dans cette simulation, les matrices de pondération $W^{(n)}$, $\forall n = 1, 2, 3$, définissant le bruit corrélé $\mathcal{B}^c$ (donné à la relation (4.66)), sont choisies comme étant des matrices aléatoires dont chaque élément est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$.

Les composantes de polarisation des différents signaux sismiques relatifs à cette simulation

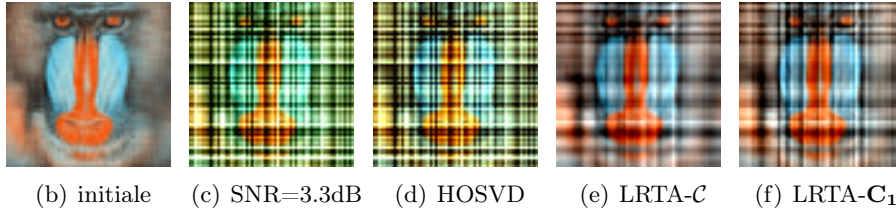
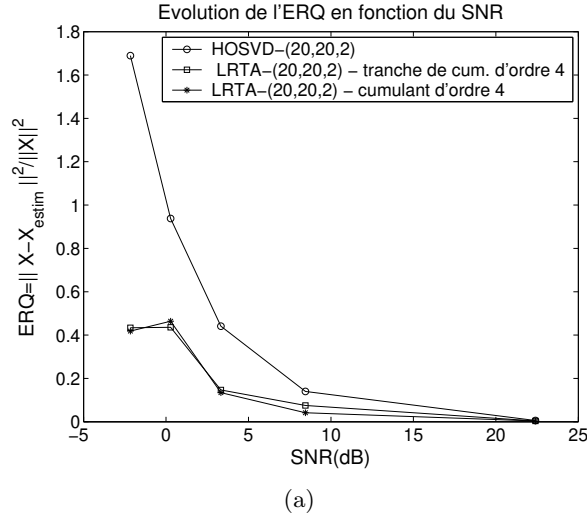


Figure 4.11 — (a) : Évolution de l'ERR en fonction du SNR (dB). (b) : Image initiale, LRTA-(20,20,2) de Baboon. (c) : Image bruitée par un bruit additif gaussien corrélé (SNR=3.3dB). (d) : Filtrage ACP multimodal classique par HOSVD-(20,20,2). (e) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur le cumulant d'ordre 4 (LRTA-C). (f) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur la matrice tranche cumulant d'ordre 4 (LRTA-C₁).

sont les suivantes :

1. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal bruité $\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}^c$ sont représentées sur les Figures 4.12(e)-4.12(g), pour lesquelles le coefficient α de la relation (4.65) est choisi de telle sorte que le SNR correspondant à $\mathcal{R}$ soit égal à -2 dB.
2. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal estimé $\hat{\mathcal{X}}_1$ grâce au filtrage par ACP multimodale classique (obtenue par HOSVD-(1,1,1) de $\mathcal{R}$) sont représentées sur les Figures 4.12(h)-4.12(j).
3. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal estimé $\hat{\mathcal{X}}_2$ grâce au filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA-(1,1,1) basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre du $\mathcal{R}$ (LRTA-C_{1,100,1}) sont représentées sur les Figures 4.12(k)-4.12(m). Dans cette simulation, la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_n}^{(n),k}$ est calculée de telle sorte que les indices des éléments de référence n -modaux sont $(q_1, q_2, q_3) = (1, 100, 1)$.

Dans ces simulations, les paramètres (K_1, K_2, K_3) impliqués dans la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) , et représentant les dimensions des sous-espaces signaux n -modaux, sont connus et fixés à $(K_1, K_2, K_3) = (1, 1, 1)$. En effet, nous pouvons montrer que l'approximation HOSVD-(1,1,1) du tenseur signal initial $\mathcal{X}$ donne un tenseur approximé $\hat{\mathcal{X}}$ dont l'ERR associée est nulle.

Enfin, l'évolution de l'ERR en fonction du SNR, représentée à la Figure 4.12(a), montre que, quel que soit le SNR variant de -2dB à 5dB , l'ERR de l'ACP multimodale obtenue par LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$ est plus faible que celle donnée par l'ACP multimodale classique.

Ceci est confirmé par la qualité des tranches sismiques correspondant aux trois composantes de polarisation du tenseur estimé $\hat{\mathcal{X}}_2$ par rapport au tenseur estimé $\hat{\mathcal{X}}_1$. En effet, nous pouvons remarquer sur la Figure 4.12, que pour un SNR= -2dB , les composantes de polarisation x et y du tenseur estimé $\hat{\mathcal{X}}_1$ ont subi une déformation par rapport à celles du tenseur estimé $\hat{\mathcal{X}}_2$.

Exemple 2 - Nous considérons maintenant que les vecteurs 2-modaux du tenseur bruit $\mathcal{N}^c$ sont totalement corrélés. Le 2-mode du tenseur $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{10 \times 200 \times 3}$ est associé au temps, par conséquent, un vecteur 2-modal donné représente le signal temporel reçu sur un capteur spatial donné, et pour une composante de polarisation donnée.

Les composantes de polarisation des différents signaux sismiques relatifs à cette simulation sont les suivantes :

1. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal bruité $\mathcal{R}$ sont représentées sur les Figures 4.13(e)-4.13(g), pour lesquelles le coefficient α de la relation (4.65) est choisi de telle sorte que le SNR correspondant à $\mathcal{R}$ soit égal à -10dB .
2. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal estimé $\hat{\mathcal{X}}_1$ grâce au filtrage par ACP multimodale classique (obtenue par HOSVD-(1,1,1) de $\mathcal{R}$) sont représentées sur les Figures 4.13(h)-4.13(j).
3. Les trois composantes de polarisation du tenseur signal estimé $\hat{\mathcal{X}}_2$ grâce au filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$ sont représentées sur les Figures 4.13(k)-4.13(m).

De même que dans l'exemple 1, les paramètres (K_1, K_2, K_3) sont supposés connus et fixés à (1,1,1). De plus, la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_n}^{(n),k}$ est calculée de telle sorte que les indices des éléments de référence n -modaux sont $(q_1, q_2, q_3) = (1, 100, 1)$.

Les Figures 4.13(h)-4.13(j) montrent clairement que, pour un bruit totalement corrélé sur le 2-mode, le filtrage par ACP multimodale classique est incapable d'estimer correctement les composantes de polarisation de $\mathcal{X}$.

En revanche, les Figures 4.13(k)-4.13(m) montrent que le filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA-(1,1,1) basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre permet d'estimer $\mathcal{X}$ avec une ERR quasiment nulle.

Ceci est confirmé par la Figure 4.13(a) qui présente l'évolution de l'ERR en fonction du SNR, correspondant :

1. au filtrage par ACP multimodale classique (carrés),
2. au filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$ (cercles),
3. et au filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA- $\mathcal{C}$ (étoiles),

pour un SNR variant de -10dB à 10dB . Cette Figure montre que, quel que soit le SNR variant de -10dB à 10dB , pour un bruit totalement corrélé sur le 2-mode, le filtrage par ACP multimodale obtenue par LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$ (cercles) donne une ERR quasiment nulle, ce qui n'est pas le cas du filtrage par ACP multimodale classique (carrés) dont l'ERR associée au tenseur signal estimé augmente progressivement avec le SNR.

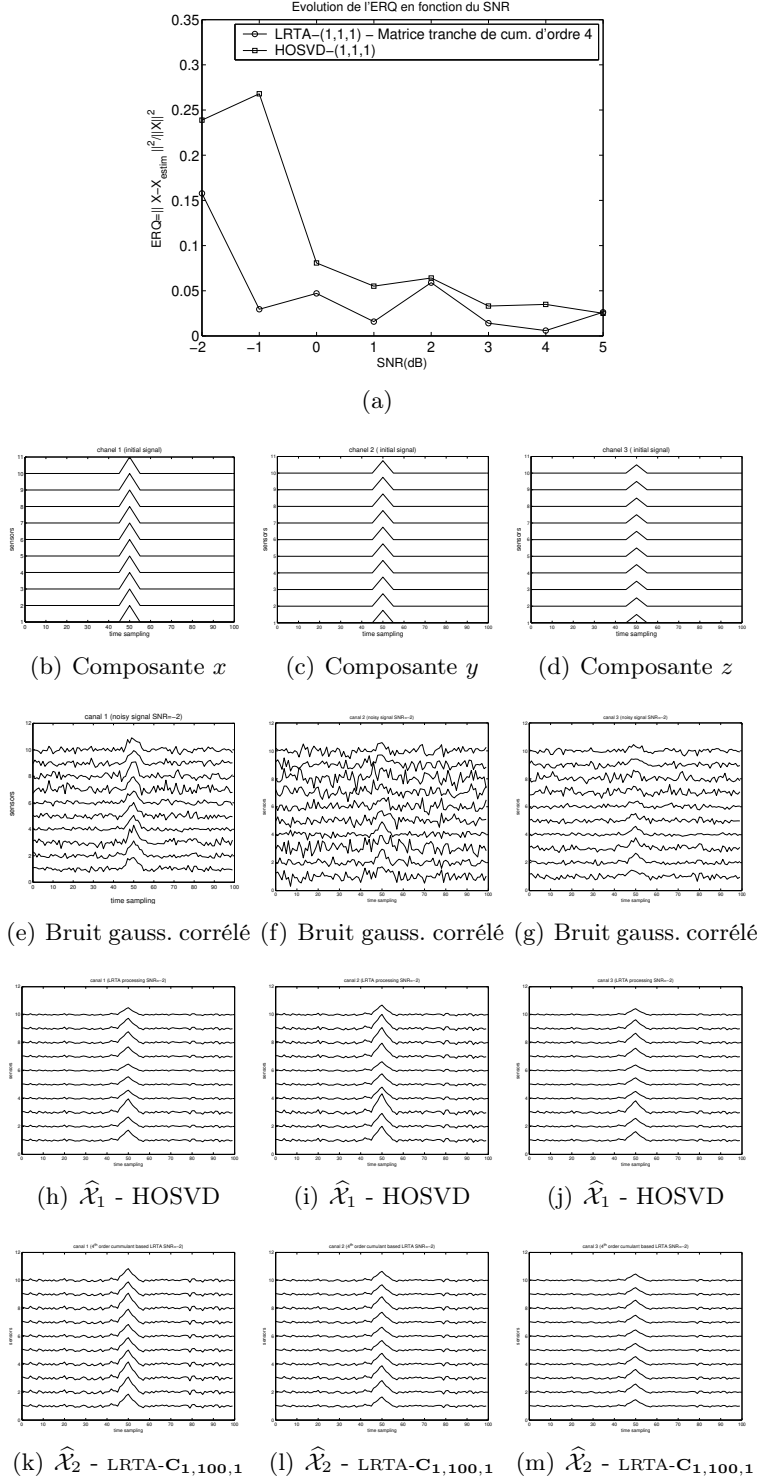


Figure 4.12 — Comparaison du filtrage par ACP multimodal classique obtenu par HOSVD-(1,1,1) et du filtrage par ACP multimodal obtenu par LRTA-(1,1,1) basé sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre (LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$) d'un signal sismique multicomposante bruité par un bruit gaussien corrélé (SNR=-2dB).

Notons enfin que, sur la Figure 4.13(a), quel que soit le SNR variant de -10dB à 10dB , l'ERR résultant du filtrage par ACP multimodale obtenue par $\text{LRTA-}\mathbf{C}_{1,100,1}$ (étoiles) est sensiblement la même que celle obtenue par $\text{LRTA-}\mathcal{C}$ (cercles).

4.4.9 Conclusion sur le filtrage par ACP multimodale obtenue par $\text{LRTA-}(K_1, K_2, K_3)$ basée sur les cumulants d'ordre 4

Dans cette section, nous avons adapté le filtrage multimodal aux signaux MM bruités par un bruit additif gaussien *corrélé*.

Dans cette nouvelle méthode, nous proposons de remplacer la matrice de covariance impliquée dans l'ACP multimodale classique, par la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre des vecteurs n -modaux du tenseur associé aux données MM bruitées. Nous proposons aussi un nouvel algorithme ALS permettant de d'obtenir cette ACP multimodale basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre.

Les résultats de simulation effectués sur des images en couleur et des signaux sismiques multicomposantes montrent que cette nouvelle méthode permet d'améliorer considérablement l'estimation du tenseur signal initial en présence de bruit additif gaussien corrélé.

D'autre part, nous avons montré que l'utilisation de la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre permet d'obtenir les mêmes résultats qu'avec le cumulant d'ordre quatre tout en diminuant la charge de calcul inhérente à l'utilisation de ce dernier.

4.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié le filtrage multimodal des données MM bruitées par un bruit additif gaussien. Nous avons organisé notre étude en deux parties :

1. la première prend en compte le cas d'un bruit additif gaussien *blanc*,
2. et la deuxième, le cas d'un bruit additif gaussien *corrélé*.

Dans la section 4.3, sous l'hypothèse d'un bruit additif gaussien *blanc*, nous avons développé une nouvelle méthode de filtrage de Wiener multimodal adaptée aux données tensorielles [54]. Ce filtrage consiste à déterminer les filtres de Wiener n -modaux optimaux, notés H_n , pour $n = 1, \dots, N$, qui minimisent l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré, et le tenseur signal estimé, obtenu en appliquant sur chaque n -mode du tenseur de données bruitée, le filtre H_n , par le biais de l'opérateur n -mode produit. Sous certaines hypothèses concernant la forme des matrices dépliantes dans un n -mode du tenseur signal désiré, nous avons pu déterminer l'expression théorique de chaque filtre de Wiener n -modal H_n . Nous avons montré que chacun de ces filtres représente une projection orthogonale pondérée sur le sous-espace signal n -modal associé au tenseur de données bruitées, dont la dimension K_n est un paramètre supposé connu *a priori*. Nous avons développé un algorithme ALS permettant de déterminer chacun des filtres de Wiener n -modaux optimaux et appliqué ce nouveau filtrage multimodal au cas du débruitage d'images en couleur et de données sismiques multicomposantes bruitées par un bruit additif gaussien *blanc*. Les résultats de simulation montrent que ce filtrage de Wiener multimodal améliore le filtrage tensoriel obtenu par ACP multimodale classique et le filtrage qui consiste à appliquer un filtrage de Wiener classique sur chaque tranche bi-dimensionnelle du tenseur de données bruitées.

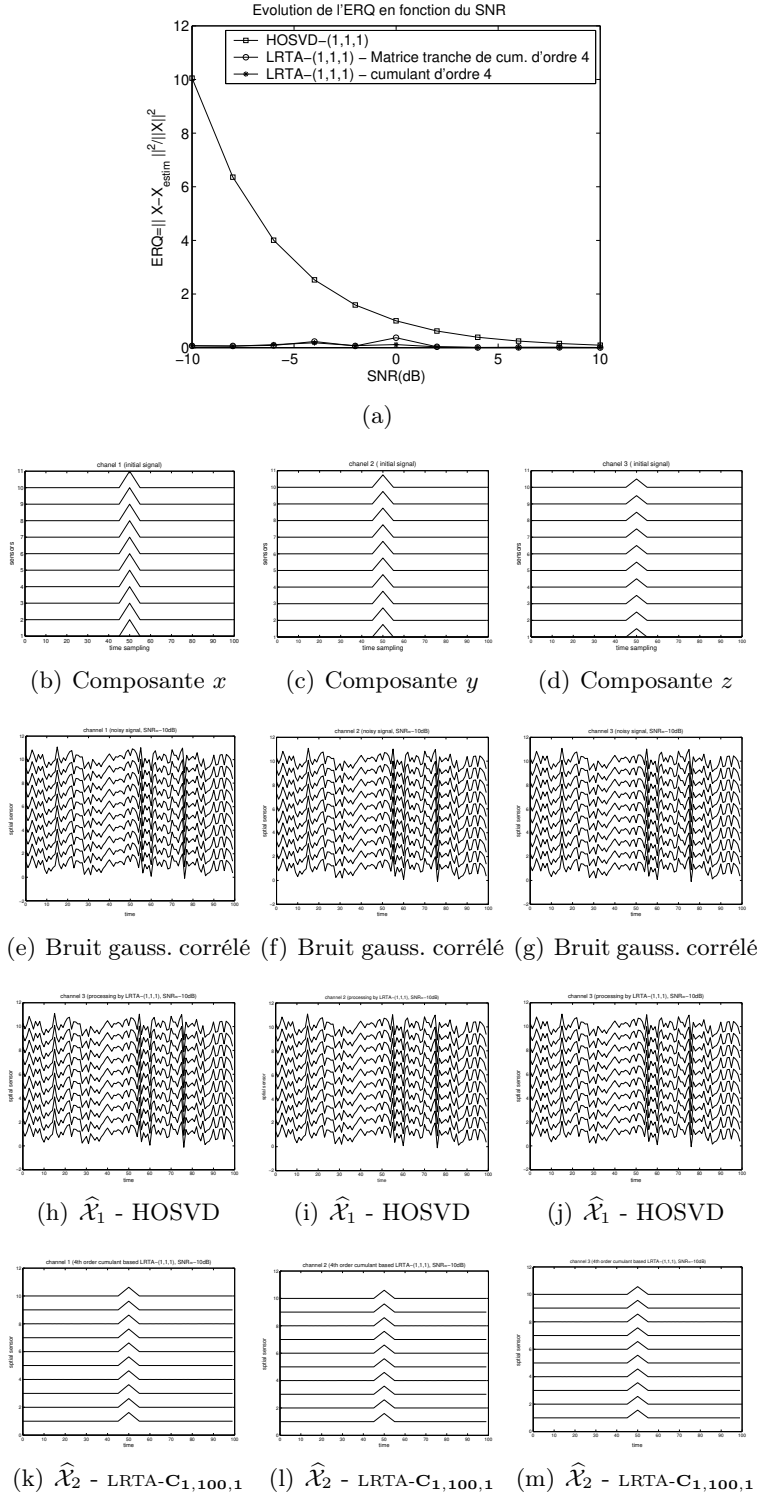


Figure 4.13 — Comparaison du filtrage par ACP multimodal classique obtenu par HOSVD-(1,1,1) et du filtrage par ACP multimodal obtenu par LRTA-(1,1,1) basé sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre (LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$) d'un signal sismique multicomposante bruité par un bruit gaussien totalement corrélé (SNR=-10dB).

Dans la section 4.4, nous avons développé une nouvelle technique de filtrage multimodal adaptée aux signaux MM bruités par un bruit additif gaussien *corrélé* [55]. Cette nouvelle méthode de filtrage représente une ACP multimodale améliorée grâce aux statistiques d'ordre supérieur. La matrice de covariance, impliquée dans la LRTA- (K_1, K_2, K_3) effectuant l'ACP multimodale classique, est remplacée par la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre des vecteurs n -modaux du tenseur associé aux données MM bruitées. L'utilisation de cette statistique d'ordre supérieur permet d'éliminer toutes composantes gaussiennes des vecteurs n -modaux considérés. Un nouvel algorithme ALS permettant d'obtenir cette ACP multimodale basée sur la matrice tranche de cumulant d'ordre quatre est proposé et appliqué au débruitage d'images en couleur et de signaux sismiques multicomposantes. Les résultats de ces simulations montrent que cette nouvelle méthode permet d'améliorer considérablement l'estimation du tenseur signal initial en présence de bruit additif gaussien *corrélé* par rapport à la méthode basée sur l'ACP multimodale classique.

Conclusion générale et perspectives

CETTE thèse a été consacrée à l'étude des traitements algébriques des signaux multidimensionnels et multicomposantes (MM) tels que les images en couleur, les séquences d'images en niveaux de gris ou les signaux sismiques polarisés qui peuvent être modélisés par des tenseurs d'ordre trois. Ces traitements sont basés sur des outils d'algèbre multilinéaires et notamment des outils de décomposition tensorielle qui généralisent la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) matricielle et l'Analyse en Composantes Principales (ACP).

Dans le **chapitre 1**, nous avons rappelé les principales définitions et propriétés algébriques et opérateurs liés aux tenseurs, notamment :

- les matrices dépliantes dans un n -mode,
- le n -mode produit qui généralise le produit matriciel entre une matrice et les vecteurs n -modaux d'un tenseur dans un n -mode particulier,
- le produit scalaire et la norme de Frobenius tensoriels.

Nous avons présenté aussi les différentes définitions des rangs d'un tenseur le rang « classique » qui généralise le rang d'une matrice, et le rang n -modal K_n qui correspond au rang de la matrice dépliant d'un tenseur dans un n -mode, sur lesquelles reposent respectivement, les décompositions tensorielles de PARAFAC/CANDECOM et TUCKER3, qui généralisent la SVD matricielle.

Nous avons ensuite synthétisé les calculs relatifs à la décomposition tensorielle de TUCKER3 qui permet de généraliser l'approximation d'une matrice par une matrice de rang inférieur. Nous avons ainsi présenté l'approximation de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur d'un tenseur, noté LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, et la Décomposition en Valeurs Singulières d'Ordre Supérieur d'un tenseur, notée HOSVD. Nous avons rappelé le processus numérique (basé sur les moindres carrés alternés) qui permet d'obtenir la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur d'ordre N . Cet algorithme est défini dans la littérature sous le nom d'algorithme TUCKALS3. D'autre part, nous avons souligné comment la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD, notée HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$, peut être considérée comme une approximation de la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$. En effet, la HOSVD- $(K_1, \dots, K_N)$ d'un tenseur constitue l'étape d'initialisation de l'algorithme TUCKALS3.

Nous avons d'autre part rappelé brièvement les principes de la décomposition canonique d'un tenseur, notée PARAFAC/CANDECOMP et l'algorithme numérique PARAFAC ALS (basé aussi sur les moindres carrés alternés) qui permet d'obtenir cette décomposition. Cet algorithme permet de calculer l'approximation de rang- K_{PACA} inférieur d'un tenseur, notée PACA- K_{PACA} . Pour finir, nous avons notamment souligné le fait que contrairement à la SVD matricielle, il n'existe, à nos jours, aucun algorithme permettant d'obtenir une décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale d'un tenseur.

Nous avons enfin rappelé comment les décompositions tensorielles de TUCKER3 et PARAFAC/CANDECOM procèdent, par construction, à une Analyse en Composantes Principales

(ACP) effectuée de façon simultanée sur tous les modes du tenseur, notée « ACP multimodale ».

Dans le **chapitres 2**, nous avons tout d'abord étudié l'influence des rangs n -modaux K_1 , K_2 et K_3 dans l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris grâce au critère de l'Erreur de Reconstruction Relative (ERR). Ce critère est défini comme le rapport entre :

1. la distance quadratique de Frobenius entre le tenseur de données initial,
2. et le tenseur de données approximé, et la norme quadratique de Frobenius du tenseur de données initial.

Pour les images en couleur et les séquences d'images en niveaux de gris considérées, nous avons tout d'abord montré que, quelle que soit l'approximation LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou HOSVD- (K_1, K_2, K_3) , il est possible de choisir des rangs n -modaux K_1 et K_2 tel que $K_1 = K_2 = K$, sans perte de généralité. Nous avons montré, d'autre part, que, pour les signaux considérés, la différence des ERR(K, K, K_3) obtenues par les approximations LRTA- (K, K, K_3) et HOSVD- (K, K, K_3) est négligeable $\forall K$ et $\forall K_3$. Par conséquent, nous avons conclu, pour les exemples considérés, que la LRTA- (K, K, K_3) et la HOSVD- (K, K, K_3) donnent des résultats identiques du point de vue de l'ERR. Ainsi, dans la suite, par souci d'économie de charge de calcul, nous avons fait usage de la HOSVD- (K, K, K_3) .

Ces propriétés ayant été établies, nous avons ensuite déterminé dans quelle mesure l'information contenue dans une image en couleur ou une séquence d'images en niveaux de gris, influence la valeur des rangs n -modaux $\hat{K}_n$ pour lesquels l'ERR obtenue par LRTA- (K_1, K_2, K_3) ou par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) est inférieure à un seuil donné. Nous avons ainsi établi que :

1. Les rangs 1-modaux et 2-modaux sont d'autant plus faibles que la structure spatiale d'une image (i.e. les contours, et les zones définissant les objets contenus dans l'image) est verticale ou horizontale, c'est à dire parallèle aux lignes ou aux colonnes.
2. Lors de l'approximation d'une séquence d'images en niveaux de gris par HOSVD- (K_1, K_2, K_3) ou par LRTA- (K_1, K_2, K_3) , les mouvements de translation ou de rotation d'un objet simple ne peuvent être décrits, sans perte d'information, qu'en considérant un grand nombre de composantes temporelles.

En se basant sur les résultats du chapitre 2, nous avons procédé, dans le **chapitre 3**, à la comparaison des méthodes d'approximation par HOSVD- (K, K, K_3) et par PACA- K_{PACA} sur trois images en couleur et trois séquences d'images en niveaux de gris.

Pour réaliser cette comparaison, nous avons estimé les rangs n -modaux $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3)$, et le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ des tenseurs associés à trois images en couleur et trois séquences d'images en niveaux de gris, qui permettent aux approximations considérées de donner une ERR inférieure à un seuil fixé. Nous avons alors cherché le lien qui existe entre la valeur des différents rangs tensoriels et le contenu (information spatiale et teintes dominantes) d'une image en couleur ainsi que le mouvement des objets contenus dans une séquence d'images.

Nous avons montré que le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ d'une image en couleur est d'autant plus faible que la structure spatiale d'une image est parallèle aux lignes et aux colonnes et que l'approximation PACA- K_{PACA} prend en compte par construction, l'ensemble des teintes dominantes d'une image en couleur.

Nous avons montré, d'autre part, que l'approximation PACA- K_{PACA} permet de reconstruire les séquences d'images en niveaux de gris étudiées avec une ERR négligeable, pour un

rang $K_{\text{PACA}} \geq I_3$, I_3 étant le nombre de trames de la séquence considérée, et que le rang $\hat{K}_{\text{PACA}}$ d'une séquence dépend du mouvement des objets qu'elle contient. Nous avons pu ainsi distinguer trois types de mouvements dans une séquence :

1. un mouvement de translation horizontale d'un objet carré noir sur fond blanc,
2. un mouvement de translation diagonale de ce même objet,
3. et le mouvement de rotation d'un disque en niveaux de gris.

Dans le **chapitre 4**, nous avons développé deux nouvelles techniques de filtrage multimodal des données MM bruitées par un bruit additif gaussien.

La première technique a été élaborée dans un contexte de bruit additif gaussien blanc. Nous avons développé un nouveau filtrage de Wiener adapté aux données tensorielles bruitées. Ce filtrage consiste à déterminer les filtres de Wiener n -modaux optimaux, notés H_n , $n = 1, \dots, N$, qui minimisent l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré, et le tenseur signal estimé obtenu en appliquant sur chaque n -mode du tenseur de données bruitées, le filtre H_n . Sous certaines hypothèses concernant la forme des matrices dépliantes dans un n -mode du tenseur signal désiré, nous avons pu déterminer l'expression théorique de chaque filtre de Wiener n -modaux H_n . Nous avons montré que chacun de ces filtres représente une projection orthogonale pondérée sur le sous-espace signal n -modal associé au tenseur de données bruitées, dont la dimension K_n est un paramètre supposé connu *a priori*. Nous avons développé un algorithme ALS permettant de déterminer chacun des filtres de Wiener n -modaux optimaux, et appliqué ce nouveau filtrage multimodal au cas du débruitage d'images en couleur et de données sismiques multicomposantes bruitées par un bruit additif gaussien blanc. Les résultats de simulation ont montré que ce nouveau filtrage de Wiener multimodal améliore le filtrage tensoriel obtenu par ACP multimodale classique, ainsi que le filtrage qui consiste à appliquer un filtrage de Wiener classique sur chaque tranche bi-dimensionnelle du tenseur de données bruitées.

La deuxième technique a été élaborée dans un contexte de bruit additif gaussien *corrélé*. Cette méthode de filtrage représente une ACP multimodale améliorée grâce aux statistiques d'ordre supérieur. La matrice de covariance, impliquée dans la LRTA- (K_1, K_2, K_3) effectuant l'ACP multimodale classique, est remplacée par la matrice « tranche de cumulants d'ordre quatre » des vecteurs n -modaux du tenseur associé aux données MM bruitées. L'utilisation de cette statistique d'ordre supérieur permet d'éliminer toutes composantes gaussiennes des vecteurs n -modaux considérés. Un nouvel algorithme ALS permettant d'obtenir cette ACP multimodale basée sur la matrice tranche de cumulants d'ordre quatre, est proposé et appliqué au débruitage d'images en couleur et de signaux sismiques multicomposantes. Les résultats de ces simulations ont montré que cette méthode permet d'améliorer l'estimation du tenseur signal initial, en présence de bruit additif gaussien corrélé, par rapport à la méthode basée sur l'ACP multimodale classique.

Perspectives

Un des objectifs en compression d'images est de représenter au mieux le contenu de l'image à l'aide d'un nombre minimum de composantes principales.

Nous avons proposé d'utiliser un déploiement des données suivant des directions diagonales [60]. Il s'agit là d'un réarrangement des données, qui diffère de celui des lignes et des

colonnes, imposé par la SVD. Ces travaux ont montré que ce pré-traitement conduit à une faible dimension du sous-espace signal.

Dans des travaux futurs, nous pouvons faire usage d'un réarrangement des données qui combine les deux modes spatiaux de l'image de façon non-linéaire, tel que celui donné par le parcours de Peano [82] couramment utilisé en traitement d'images. En effet, ce parcours est basé sur des notions fractales qui permettent de prendre en compte l'échelle à laquelle l'image est étudiée. Dans le cas où des structures linéaires ne sont pas présentes, nous nous attendons à ce que ce réarrangement respecte la cohérence spatiale des objets et formes qui composent une image et permettra ainsi de diminuer de façon significative le nombre de composantes nécessaires à décrire cette image. De plus, nous avons montré que, dans un contexte de données bruitées, un faible nombre de composantes décrivant le signal permet d'améliorer l'orthogonalité entre l'espace signal et l'espace bruit associé à une image bruitée, et améliore ainsi les techniques algébriques de débruitage [60].

Il serait aussi intéressant d'adapter le concept de réarrangement des données matricielles aux données tensorielles telles que les images en couleur, les séquences d'images en niveaux de gris et aux séquences d'images en couleur (modélisées par des tenseurs d'ordre quatre).

D'autre part, dans le cas de signaux non bruités, nous avons étudié, au chapitre 3, le contenu d'une image ou d'une séquence d'images en niveaux de gris et les valeurs des rangs n -modaux. Dans le cas des signaux bruités, nous avons développé des méthodes de filtrage en supposant connues les dimensions des sous-espaces signaux n -modaux associées au tenseur de données bruitées. Nous proposons dans des travaux futurs, de développer des méthodes d'estimation des dimensions des sous-espaces signaux n -modaux basées par exemple sur des critères de détection MDL (Minimum Description Length) [69] ou AIC (Akaike Information Criterion)[1].

Enfin, pour conclure ce manuscrit, il serait intéressant de développer de nouveaux algorithmes permettant d'obtenir une décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale. En effet, de même que la détermination d'une famille de base d'ondelettes orthogonales a permis d'améliorer tous les domaines d'application du traitement du signal, l'existence d'une décomposition PARAFAC/CANDECOMP orthogonale unique, offrirait des possibilités très prometteuses dans tous les domaines d'application où le traitement algébrique des données MM peut s'appliquer.

A

Résultats sur l'influence des rangs n -modaux sur l'ERR donnée par la troncature de la HOSVD et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) - Chapitres 2 et 3

A.1 Simulation sur les images en couleur

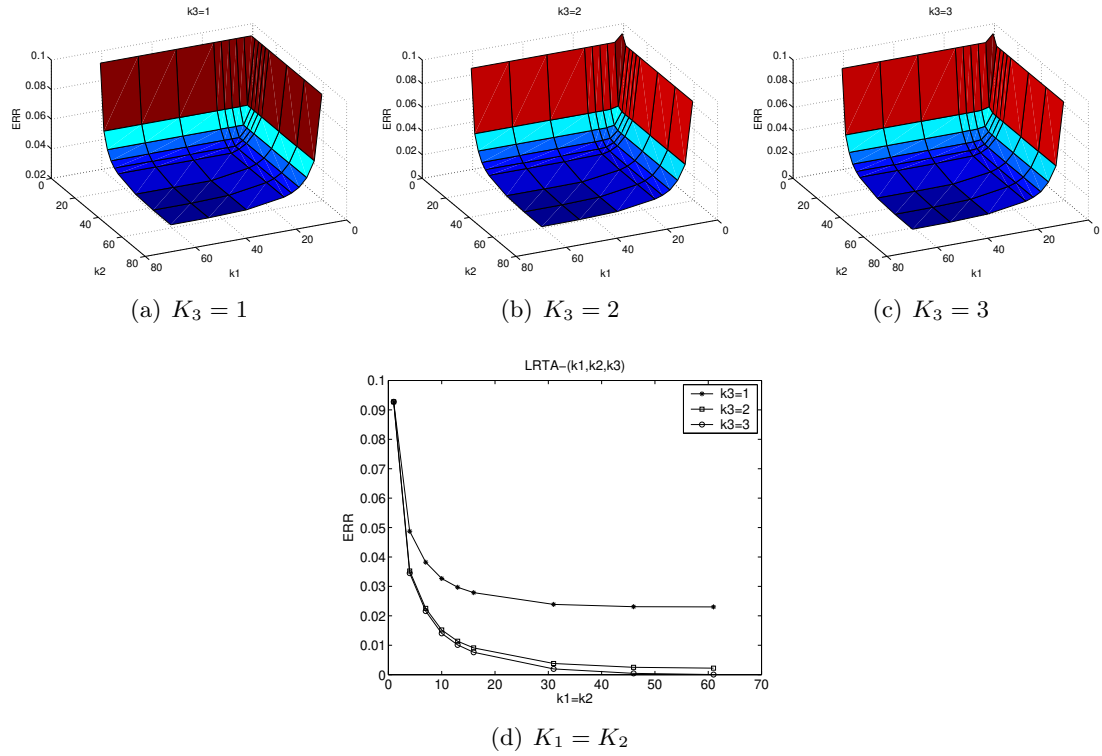


Figure A.1 — ERR pour la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".

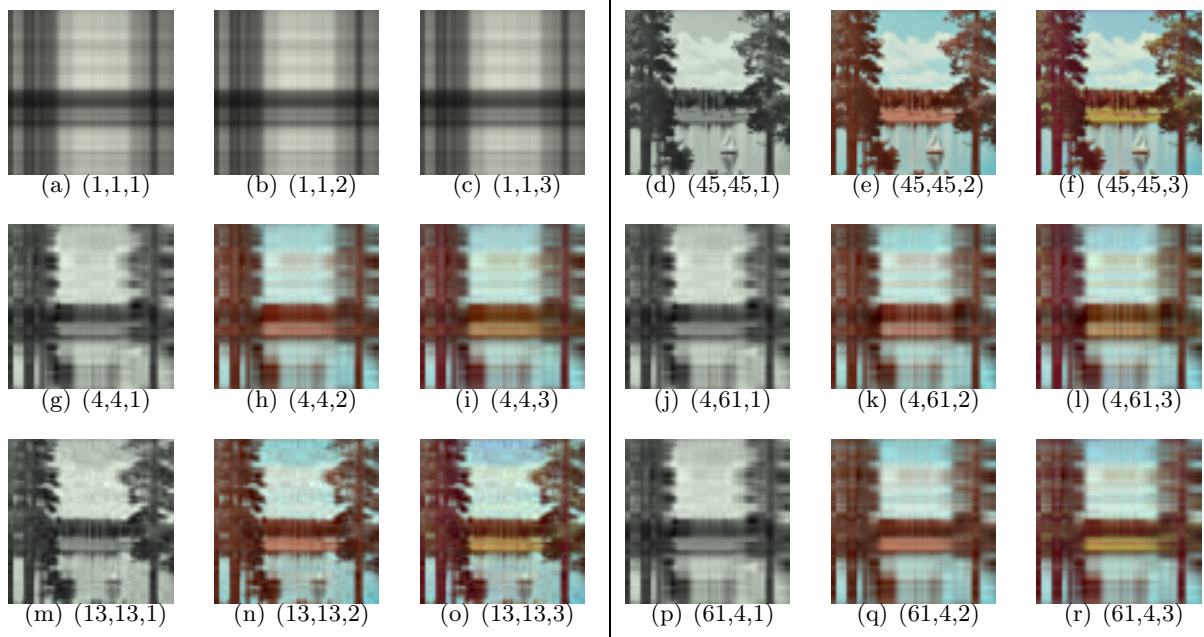


Figure A.2 — Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Sailboat".

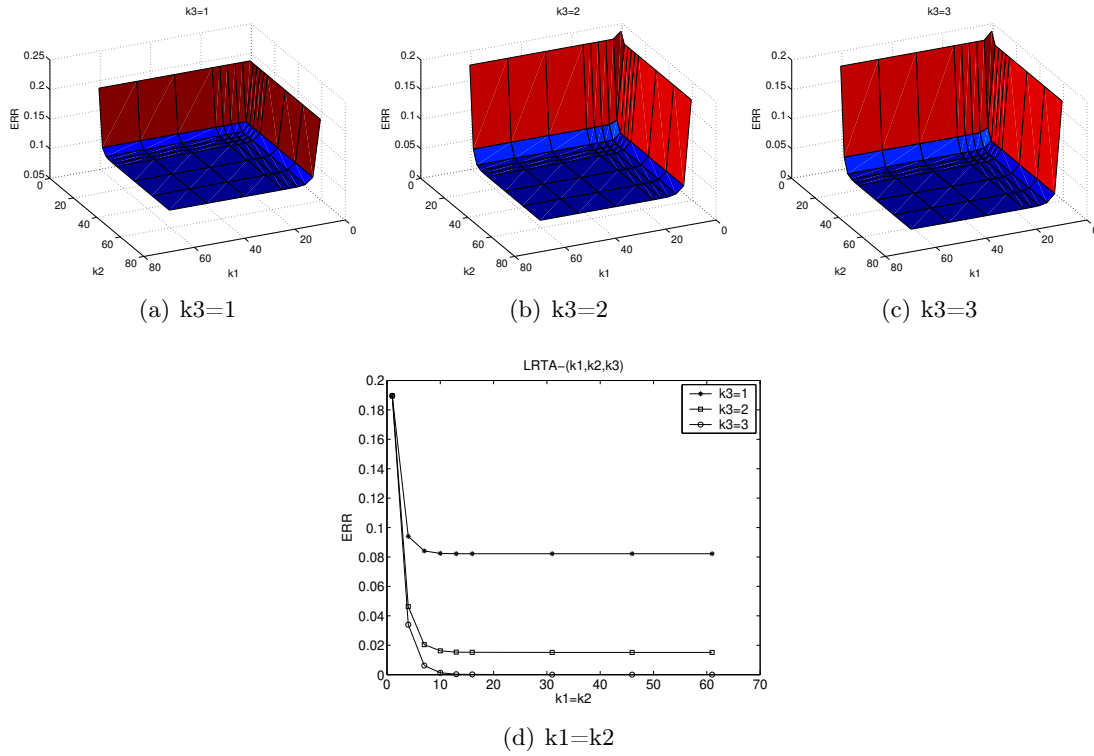


Figure A.3 — ERR pour la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondrian1".

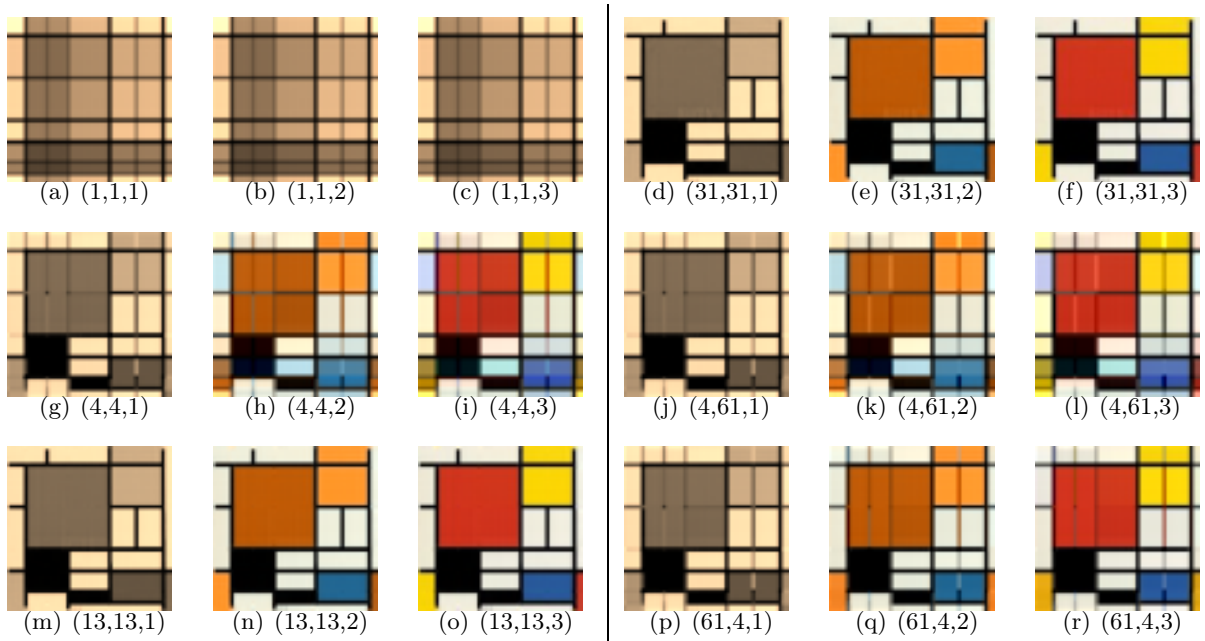
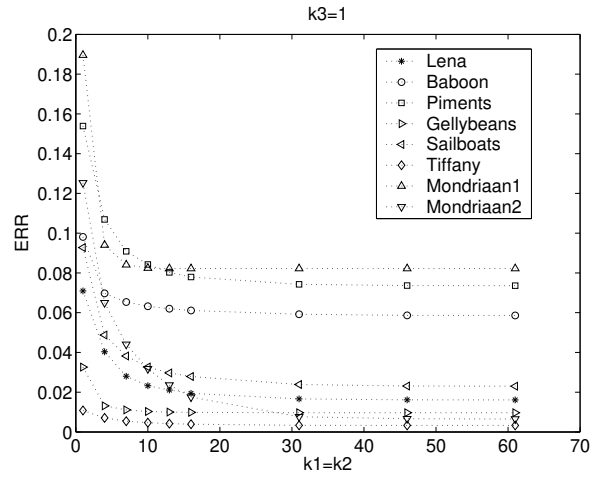
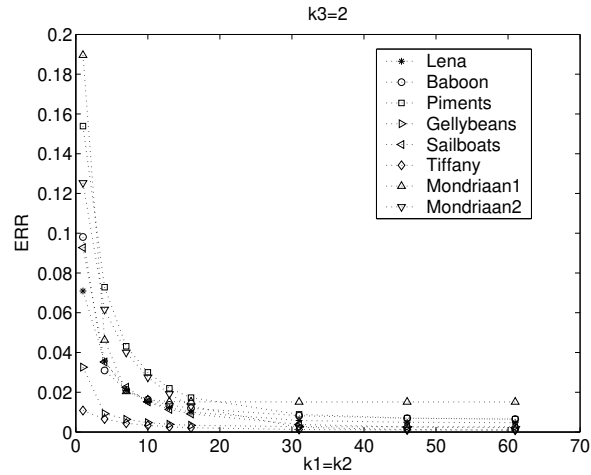


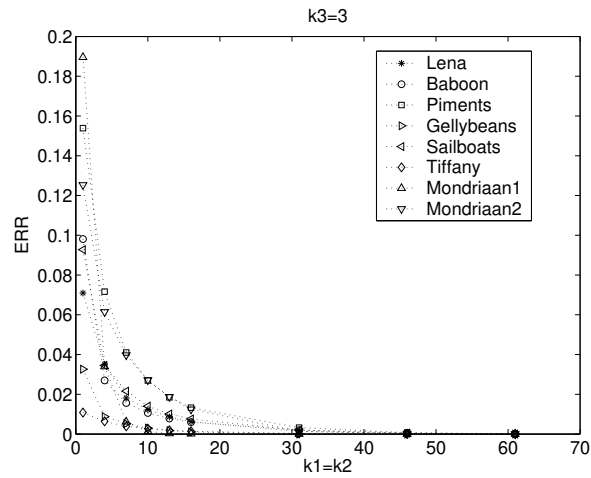
Figure A.4 — Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Mondrian1".



(a) $K_3 = 1$

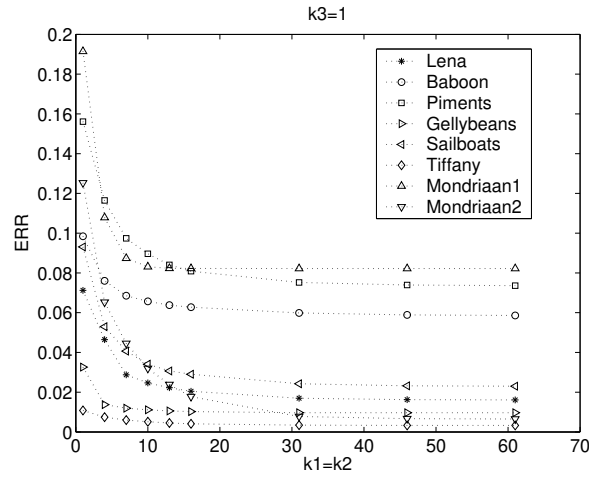


(b) $K_3 = 2$

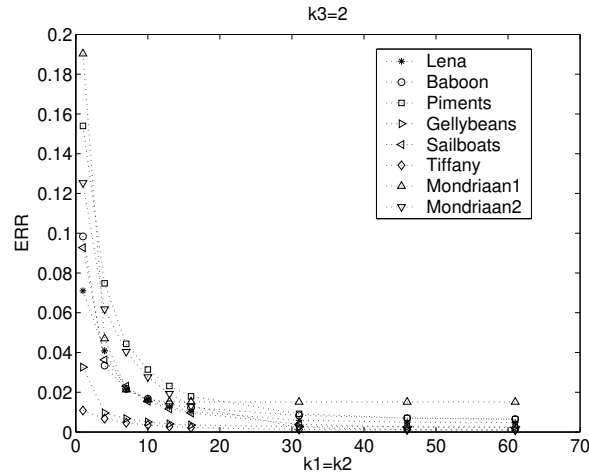


(c) $K_3 = 3$

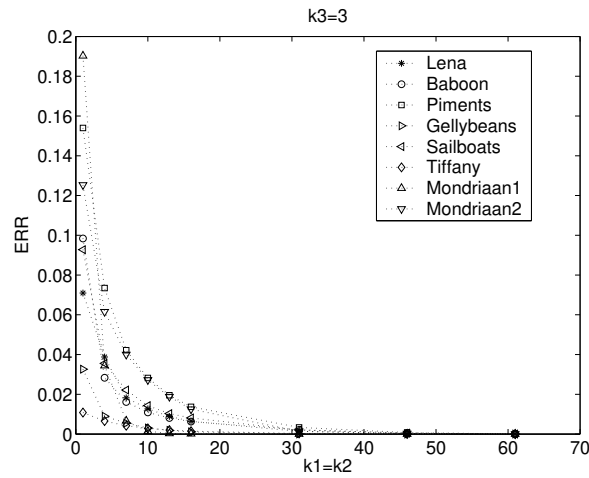
Figure A.5 — Évolution de l'ERR en fonction de K , pour la LRTA- (K, K, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant chacune des images en couleur, à K_3 fixé.



(a) $K_3 = 1$



(b) $K_3 = 2$



(c) $K_3 = 3$

Figure A.6 — Évolution de l'ERR en fonction de K , pour la HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant chacune des images en couleur, à K_3 fixé.

A.2 Simulation sur les séquences d'images

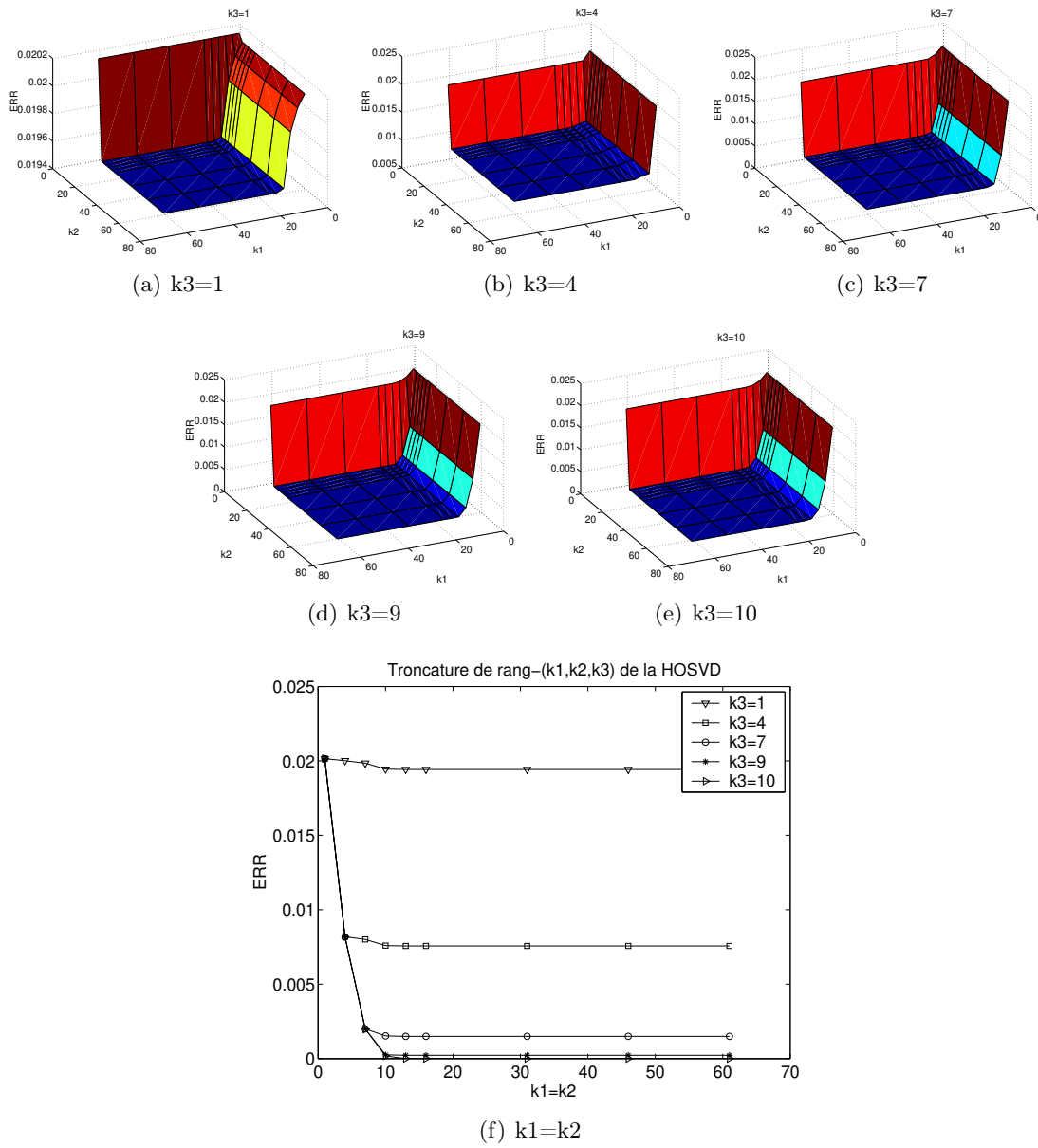


Figure A.7 — ERR pour la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.



Figure A.8 — Séquences résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur correspondant à la Séquence1.

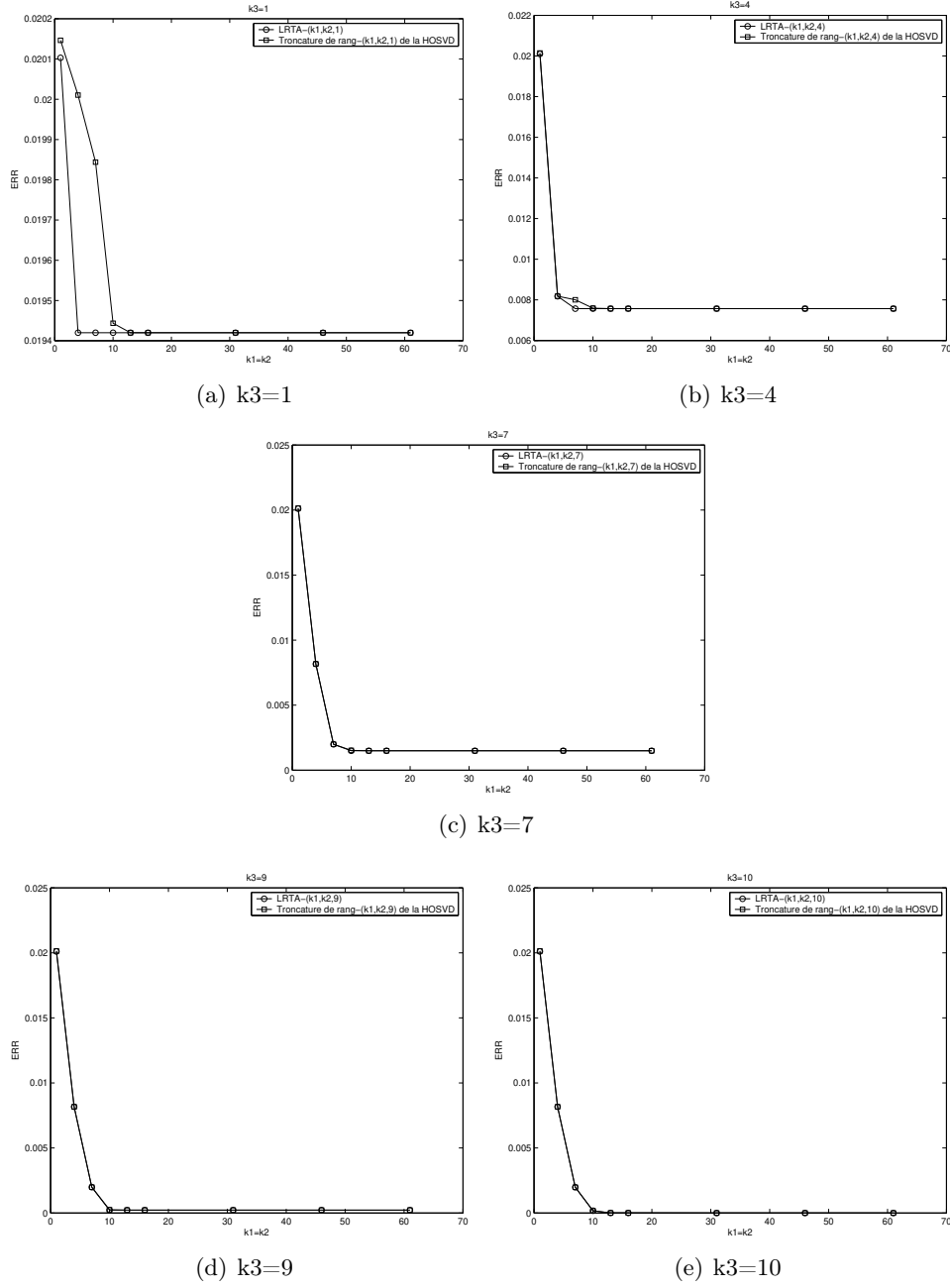


Figure A.9 — Comparaison des ERR résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) et de la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.

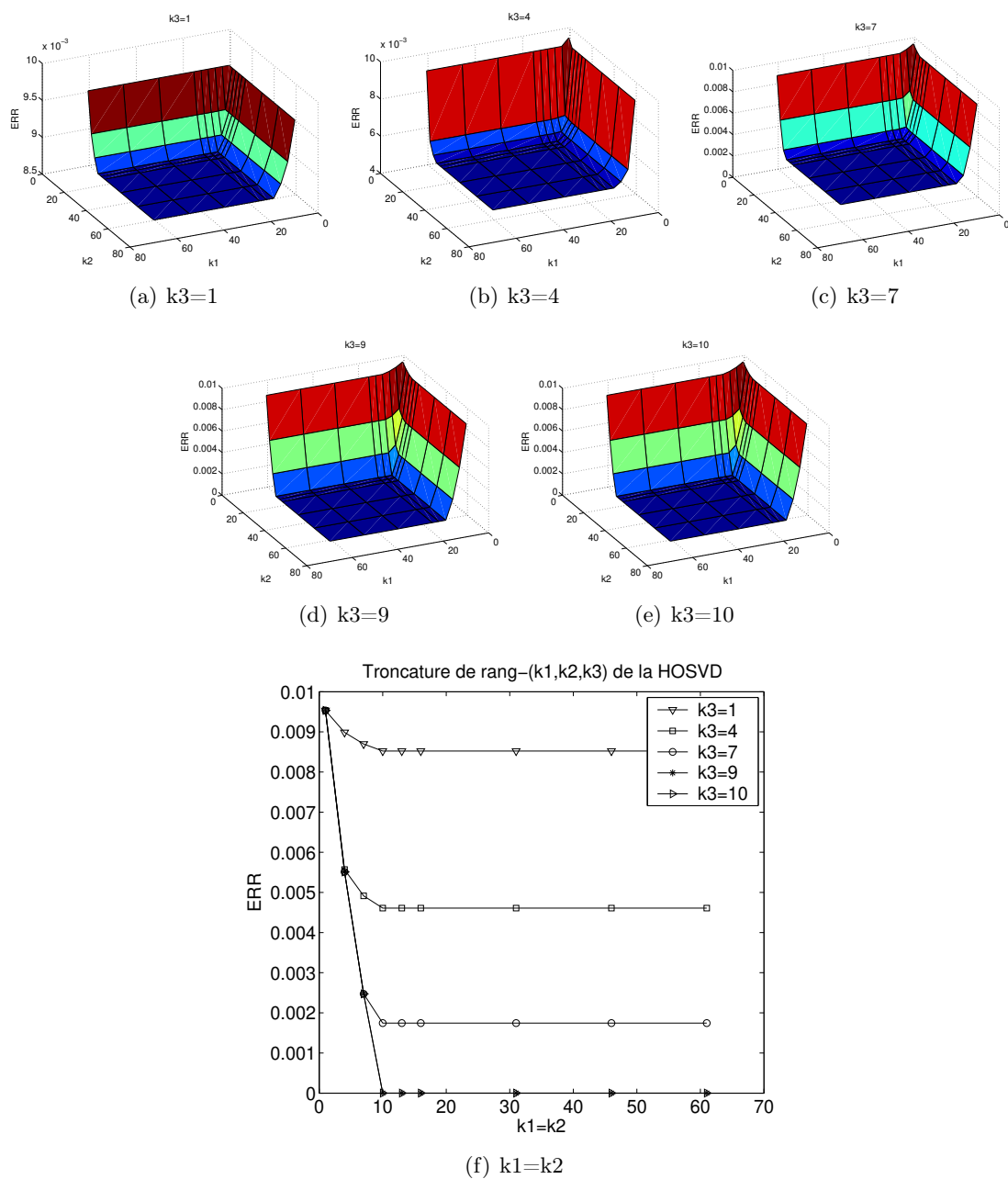


Figure A.10 — ERR pour la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.

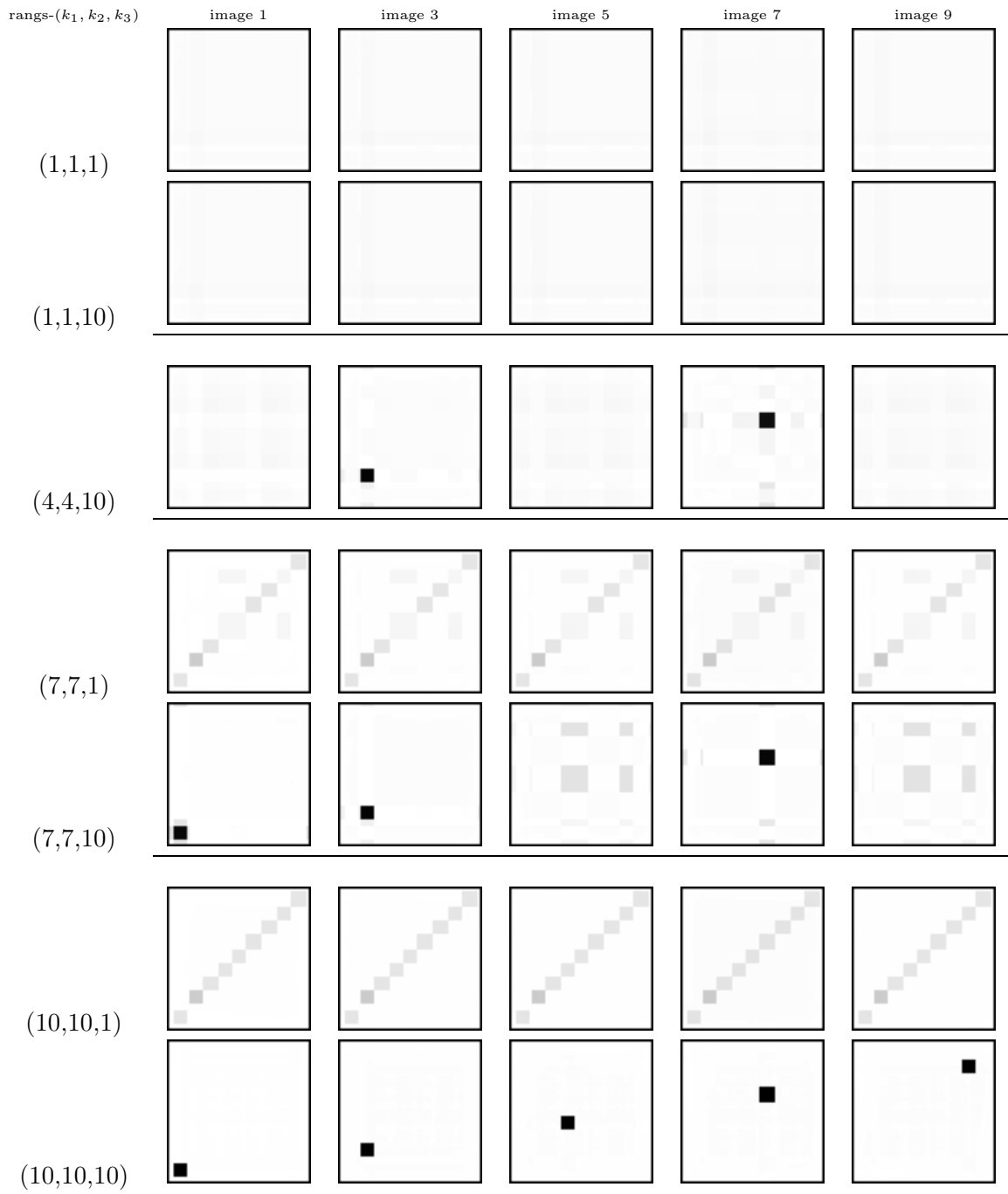


Figure A.11 — Séquences résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur correspondant à la Séquence2.

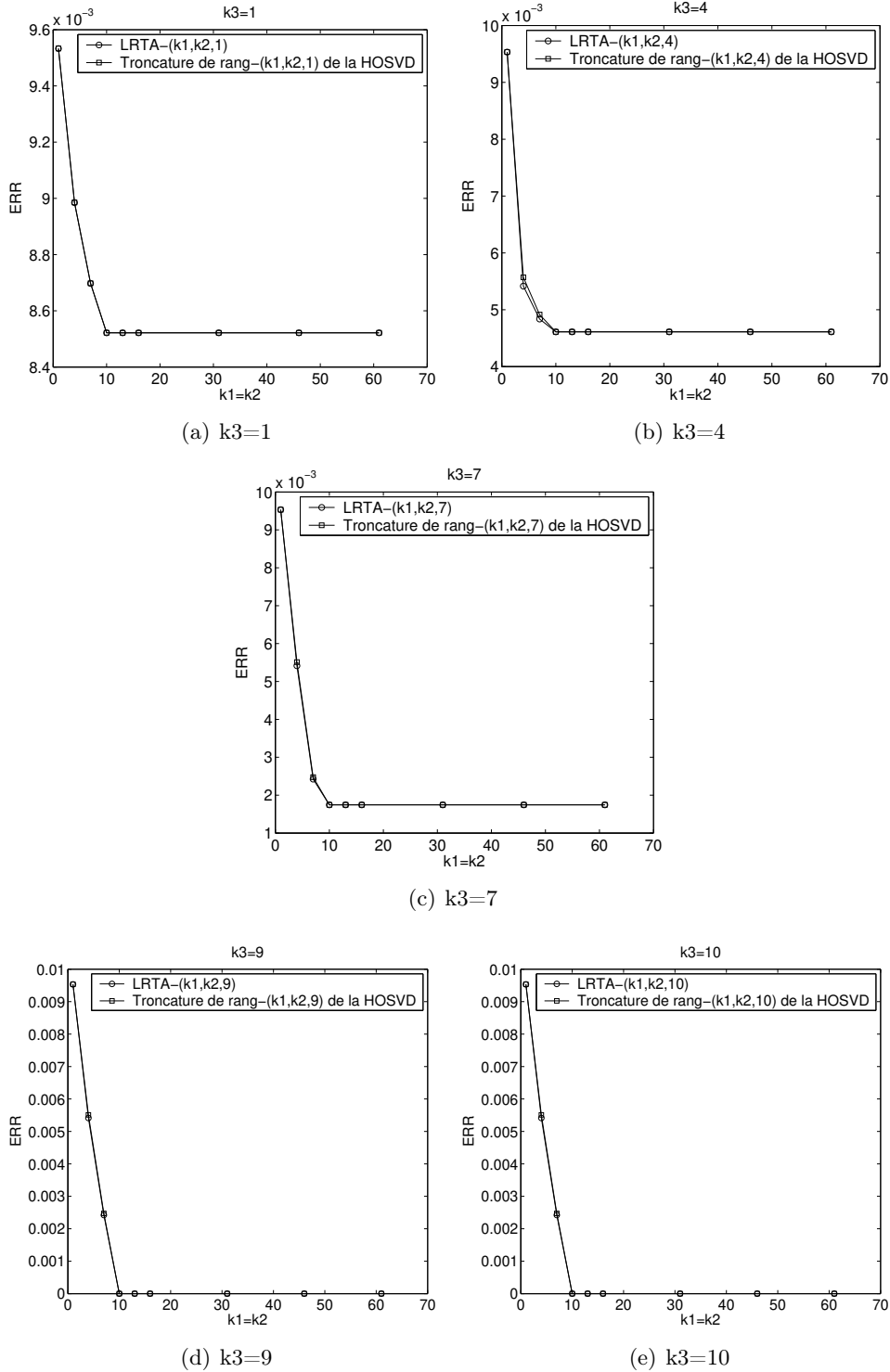


Figure A.12 — Comparaison des ERR résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) et de la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.

Calculs associés aux filtres de Wiener n -modaux - Chapitre 4

B.1 Expression analytique du Wiener filter n -modal

Les calculs qui suivent sont liés à la section 4.3.1.2 et utilisent les définitions et propriétés de la section 1.2.

L'erreur quadratique moyenne e sur laquelle repose le filtrage de Wiener multimodal est donnée par la relation (4.11) :

$$e(H_1, \dots, H_N) = E \left(\|\mathcal{X}\|^2 \right) - 2E \left(\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \rangle \right) + E \left(\|\mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N\|^2 \right). \quad (\text{B.1})$$

D'après la relation (1.14), la norme de Frobenius d'un tenseur est définie comme la somme du carré de ses termes. Par conséquent, la norme de Frobenius d'un tenseur est aussi égale à la norme de Frobenius de n'importe laquelle de ses matrices dépliantes dans un n -mode. Afin de déterminer l'expression du filtre H_n associés aux filtres supposés fixés $H_m, \forall m \neq n$, nous utiliserons cette remarque pour calculer l'expression de l'erreur e donnée à la relation (B.1) dépliée dans le n -mode.

Expression de la relation $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \rangle$ exprimée en fonction des dépliantes dans le n -mode

D'après la propriété (1.26), l'expression de $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \rangle$ exprimée en fonction des dépliantes dans le n -mode, est donnée par :

$$\langle X_n | H_n R_n (H_1^T \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T \otimes H_{n+1}^T \cdots \otimes H_N^T) \rangle, \quad (\text{B.2})$$

qui, d'après la propriété (1.13), peut s'exprimer en fonction de l'opérateur trace par :

$$\text{tr} \left(X_n (H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1} \otimes H_{n+1} \cdots \otimes H_N) R_n^T H_n^T \right). \quad (\text{B.3})$$

Pour établir cette relation, nous avons utilisé l'extension de la propriété (1.23) à plusieurs matrices :

$$(H_1^T \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T \otimes H_{n+1}^T \cdots \otimes H_N^T)^T = (H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1} \otimes H_{n+1} \cdots \otimes H_N). \quad (\text{B.4})$$

Posons :

$$g_{XR}^{(n)} = X_n \mathbf{q}^{(n)} R_n^T. \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$\mathbf{q}^{(n)} = H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1} \otimes H_{n+1} \otimes \cdots \otimes H_N. \quad (\text{B.6})$$

Par conséquent, $\forall n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N \rangle = \text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right). \quad (\text{B.7})$$

Expression la relation $\|\mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N\|^2$ exprimée en fonction des dépliantes dans le n -mode

De même que précédemment, d'après les propriétés (1.26) et (1.13), l'expression de $\|\mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N\|^2$ exprimée en fonction des dépliantes dans le n -mode, est donnée par :

$$\text{tr} \left(H_n R_n (H_1^T \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T \otimes H_{n+1}^T \otimes \cdots \otimes H_N^T) (H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1} \otimes H_{n+1} \otimes \cdots \otimes H_N) R_n^T H_n^T \right), \quad (\text{B.8})$$

En utilisant la propriété (1.22) sur le produit de Kronecker, l'expression B.8 devient :

$$\text{tr} \left(H_n R_n (H_1^T H_n \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T H_{n-1} \otimes H_{n+1}^T H_{n+1} \otimes \cdots \otimes H_N^T H_N) R_n^T H_n^T \right).$$

De même que précédemment, posons :

$$G_{RR}^{(n)} = R_n \mathbf{Q}^{(n)} R_n^T, \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(n)T} \mathbf{q}^{(n)} = H_1^T H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1}^T H_{n-1} \otimes H_{n+1}^T H_{n+1} \otimes \cdots \otimes H_N^T H_N. \quad (\text{B.10})$$

Par conséquent, $\forall n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\mathcal{R} \times_1 H_1 \cdots \times_N H_N\|^2 = \text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right). \quad (\text{B.11})$$

Minimisation de l'erreur quadratique moyenne $e(H_1, \dots, H_N)$

En introduisant les relations (B.7) et (B.11) dans la relation (B.1), l'expression de l'erreur quadratique moyenne $e(H_1, \dots, H_N)$ dépliée dans le n -mode peut s'écrire par :

$$e(H_1, \dots, H_N) = \text{E} \left[\|X_n\|^2 \right] - 2\text{E} \left[\text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right) \right] + \text{E} \left[\text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right) \right]. \quad (\text{B.12})$$

En supposant que les filtres m -modaux H_m sont fixés pour tout $m \neq n$, l'erreur quadratique moyenne $e(H_1, \dots, H_N)$ est minimale lorsque sa dérivée¹ par rapport au filtre n -modal H_n est nulle. Étant donné que $\|X_n\|^2$ est indépendant de H_n , ceci peut être écrit par :

$$\text{E} \left[\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right) \right] = 2\text{E} \left[\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right) \right], \quad (\text{B.13})$$

dans laquelle $G_{RR}^{(n)}$ et $g_{XR}^{(n)}$ sont aussi indépendants de H_n .

Avant de développer les deux termes de la relation (B.13) pour en extraire l'expression du filtre n -modal H_n , il est nécessaire de rappeler quelques propriétés sur la dérivée d'une trace de matrices.

¹Le terme « dérivée » est un abus de langage, il faut normalement employer le terme « gradient ».

Propriété sur la dérivée d'une trace

Quelles que soient les matrices $L \in \mathbb{R}^{M \times N}$ et $R \in \mathbb{R}^{N \times N}$, si L est indépendante de R , la propriété suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial R} \text{tr}[LR] = \frac{\partial}{\partial R^T} \text{tr}[LR^T] = \left(\frac{\partial}{\partial R} \text{tr}[LR^T] \right)^T = L^T. \quad (\text{B.14})$$

Considérons la forme linéaire quadratique définie sur $\mathbb{R}^{n \times m}$ $\Phi(A) = \frac{1}{2} \text{tr}(ACA^T)$, telle que $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et telle que $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ soit une matrice symétrique constante. Alors, le gradient de $\Phi(A)$ sur $\mathbb{R}^{n \times m}$ peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial}{\partial A} \Phi(A) = AC \quad (\text{B.15})$$

En considérant maintenant les deux propriétés (B.14) et (B.15) sur la gradient d'une trace de matrices, il est possible de développer les deux termes de la relation (B.13).

Expression de $\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right)$

Étant donné que la matrice $g_{XR}^{(n)}$ est indépendante du filtre n -modal H_n , le dernier terme de la propriété (B.14) implique que :

$$\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(g_{XR}^{(n)} H_n^T \right) = g_{XR}^{(n)}. \quad (\text{B.16})$$

Expression de $\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right)$

D'après les relations (B.9) et (B.10), la matrice $G_{RR}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times I_n}$ est symétrique et indépendante de H_n . Par conséquent, la propriété (B.15) implique que :

$$\frac{\partial}{\partial H_n} \text{tr} \left(H_n G_{RR}^{(n)} H_n^T \right) = 2H_n G_{RR}^{(n)}. \quad (\text{B.17})$$

Expression du filtre de Wiener n -modal H_n

En introduisant les relations (B.16) et (B.17) dans l'expression (B.13) nous obtenons l'expression du filtre de Wiener n -modal H_n associé aux filtres m -modaux H_m fixés $\forall m \neq n$:

$$H_n = \gamma_{XR}^{(n)} \Gamma_{RR}^{(n)-1}, \quad (\text{B.18})$$

dans laquelle :

$$\gamma_{XR}^{(n)} = \mathbb{E} \left[g_{XR}^{(n)} \right], \quad (\text{B.19})$$

est définie comme la matrice de covariance n -modale $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée entre le tenseur signal $\mathcal{X}$ et le tenseur de données $\mathcal{R}$. D'autre part :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \mathbb{E} \left[G_{RR}^{(n)} \right], \quad (\text{B.20})$$

est définie comme la matrice de covariance n -modale $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée du tenseur de données $\mathcal{R}$.

Dans la section suivante, en se basant sur l'hypothèse de la relation (4.22) concernant la forme de la dépliante sur le n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$, nous allons donner une expression calculable de la matrice $\gamma_{XR}^{(n)}$ qui ne dépendra que de grandeurs supposées connues telles que le tenseurs de données $\mathcal{R}$ et les filtres m -modaux H_m , $\forall m \neq n$.

B.2 Filtre de Wiener n -modal associé à l'hypothèse sur la forme de la dépliante sur le n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$

Les calculs qui suivent sont liés à la section 4.3.1.4. Ils permettent d'obtenir une expression calculable du filtre de Wiener n -modal H_n donné à la relation (B.18). Cette expression ne dépend que de grandeurs supposées connues telles que le tenseur de données $\mathcal{R}$ et les filtres m -modaux H_m , $\forall m \neq n$. Pour mener à bien ces calculs, il est nécessaire de considérer l'hypothèse de la relation (4.22) concernant la forme de la dépliante sur le n -mode du tenseur signal $\mathcal{X}$. Considérons d'autre part, les matrices $\mathbf{q}^{(n)}$ et $\mathbf{Q}^{(n)}$ définies aux relations (B.6) et (B.10). Leurs termes génériques sont notés respectivement $q_{ij}^{(n)}$ et $Q_{ij}^{(n)}$. De façon à alléger les notations, nous noterons par x_{ij} et b_{ij} les termes- (i, j) des matrices X_n et B_n dépliantes dans le n -mode des tenseurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$.

Indépendance des termes de la matrice objet

Dans la relation (4.22), les termes de la matrice aléatoire de pondération définie comme la matrice objet $O^{(n)} \in \mathbb{R}^{K_n \times M_n}$ sont supposés mutuellement indépendants :

$$E(o_{kl}o_{mn}) = \alpha_{kl}\delta_{km}\delta_{ln}, \quad (\text{B.21})$$

dans laquelle $(k, m) \in \{1, \dots, K_n\}^2$ et $(l, n) \in \{1, \dots, M_n\}^2$, avec $M_n = I_1 \cdots I_{n-1}I_{n+1} \cdots I_N$. D'autre part, α_{kl} est non nul, et δ représente le symbole de Kronecker défini à la relation (4.7).

Condition sur le bruit blanc gaussien

La condition de bruit blanc gaussien (4.6) appliquée à la matrice dépliante dans le n -mode B_n s'exprime par :

$$E(b_{kl}b_{pq}) = \sigma^2\delta_{kp}\delta_{lq}, \quad (\text{B.22})$$

dans laquelle $(k, p) \in \{1, \dots, K_n\}^2$ et $(l, q) \in \{1, \dots, M_n\}^2$, et σ^2 est la puissance du bruit défini précédemment à la relation (4.6).

Indépendance entre le signal et le bruit

La condition d'indépendance entre le tenseur signal et le tenseur bruit, exprimée dans le n -mode se traduit par :

$$E(x_{kl}b_{pq}) = 0, \quad (\text{B.23})$$

dans laquelle $(k, m) \in \{1, \dots, K_n\}^2$, et $(l, q) \in \{1, \dots, M_n\}^2$. Par conséquent, les matrices de covariances n -modales $\mathbf{q}^{(n)}$ et $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérées entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$ sont nulles :

$$\begin{aligned}\gamma_{XB}^{(n)} &= \gamma_{BX}^{(n)} = 0, \\ \Gamma_{XB}^{(n)} &= \Gamma_{BX}^{(n)} = 0.\end{aligned}\tag{B.24}$$

En effet, le terme (i, j) de ces deux matrices est donné par :

$$\begin{aligned}\left(\gamma_{XB}^{(n)}\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} q_{kl}^{(n)} E(x_{ik} b_{jl}), \\ \left(\Gamma_{XB}^{(n)}\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} Q_{kl}^{(n)} E(x_{ik} b_{jl}).\end{aligned}\tag{B.25}$$

Expression des matrices de covariance n -modales pondérées

Matrice de covariance n -modale $\gamma_{RR}^{(n)}$

Comme $R_n = X_n + B_n$, nous pouvons écrire :

$$\gamma_{RR}^{(n)} = \gamma_{XX}^{(n)} + \gamma_{XB}^{(n)} + \gamma_{BX}^{(n)} + \gamma_{BB}^{(n)}.\tag{B.26}$$

Par conséquent, d'après la relation (B.24), la matrice de covariance n -modale $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée $\gamma_{RR}^{(n)}$ s'exprime par :

$$\gamma_{RR}^{(n)} = \gamma_{XX}^{(n)} + \gamma_{BB}^{(n)}.\tag{B.27}$$

De plus :

$$\gamma_{XR}^{(n)} = \gamma_{XX}^{(n)} + \gamma_{XB}^{(n)} = \gamma_{XX}^{(n)}.\tag{B.28}$$

Matrice de covariance n -modale $\Gamma_{RR}^{(n)}$

Les relations précédentes sont aussi valables pour la matrice de covariance n -modale $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée $\Gamma_{RR}^{(n)}$:

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \Gamma_{XX}^{(n)} + \Gamma_{XB}^{(n)} + \Gamma_{BX}^{(n)} + \Gamma_{BB}^{(n)}.$$

La relation (B.24) entraîne que :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \Gamma_{XX}^{(n)} + \Gamma_{BB}^{(n)}.\tag{B.29}$$

De plus :

$$\Gamma_{XR}^{(n)} = \Gamma_{XX}^{(n)} + \Gamma_{XB}^{(n)} = \Gamma_{XX}^{(n)}.\tag{B.30}$$

Expression de $\Gamma_{BB}^{(n)}$ et $\gamma_{BB}^{(n)}$

D'après la relation (B.22), le terme (i, j) de la matrice $\Gamma_{BB}^{(n)}$ est le suivant :

$$\left(\Gamma_{BB}^{(n)}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} q_{kl}^{(n)} E(b_{ik} b_{jl}) = \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} q_{kl}^{(n)} \sigma^2 \delta_{ij} \delta_{kl} = \sigma_{\Gamma}^{(n)^2} \delta_{ij},\tag{B.31}$$

avec :

$$\sigma_{\Gamma}^{(n)^2} = \text{tr}(\mathbf{Q}^{(n)})\sigma^2, \quad (\text{B.32})$$

dans laquelle σ^2 est la puissance du bruit définie à la relation (B.22). Par conséquent :

$$\Gamma_{BB}^{(n)} = \sigma_{\Gamma}^{(n)^2} \mathbf{I}_{I_n}. \quad (\text{B.33})$$

De même, le terme (i, j) de la matrice $\gamma_{BB}^{(n)}$ peut aussi s'exprimer par :

$$\left(\gamma_{BB}^{(n)}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} q_{kl}^{(n)} E(b_{ik} b_{jl}) = \sigma_{\gamma}^{(n)^2} \delta_{ij},$$

avec :

$$\sigma_{\gamma}^{(n)^2} = \text{tr}(\mathbf{q}^{(n)})\sigma^2.$$

Par conséquent :

$$\gamma_{BB}^{(n)} = \sigma_{\gamma}^{(n)^2} \mathbf{I}_{I_n}. \quad (\text{B.34})$$

Expression de $\Gamma_{XX}^{(n)}$ et $\gamma_{XX}^{(n)}$

En considérant l'hypothèse effectuée sur la dépliante X_n dans le n -mode, donnée à la relation (4.22), la matrice de corrélation dans le n -mode du tenseur $\mathcal{X}$ s'écrit comme :

$$\gamma_{XX}^{(n)} = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T}, \quad (\text{B.35})$$

dans laquelle

$$\gamma_{OO}^{(n)} = E(O\mathbf{q}^{(n)}O^T). \quad (\text{B.36})$$

D'après la relation (B.21), le terme (i, j) de la matrice $\gamma_{OO}^{(n)}$ est le suivant :

$$\left(\gamma_{OO}^{(n)}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{M_n} q_{kl}^{(n)} E(b_{ik} b_{jl}) = \beta_i \delta_{ij}, \quad (\text{B.37})$$

dans lequel $\forall i = 1, \dots, K_n$:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{M_n} q_{kk}^{(n)} \alpha_{ik}, \quad (\text{B.38})$$

et où α_{ik} est défini à la relation (B.21). Par conséquent, $\gamma_{OO}^{(n)}$ est une matrice diagonale :

$$\gamma_{OO}^{(n)} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{K_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

De même, la matrice $\Gamma_{XX}^{(n)}$ peut aussi s'écrire comme :

$$\Gamma_{XX}^{(n)} = V_s^{(n)} \Gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T}, \quad (\text{B.40})$$

dans laquelle $\Gamma_{OO}^{(n)}$ est une matrice diagonale :

$$\Gamma_{OO}^{(n)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_{K_n} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

avec :

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{M_n} Q_{kk}^n \alpha_{ik}, \quad (\text{B.42})$$

et où α_{ik} est défini à la relation (B.21).

Expression finale du filtre de Wiener n -modal H_n

D'après les relations (B.28) et (B.35), la matrice de covariance n -modale $\mathbf{q}^{(n)}$ -pondérée entre le tenseur signal et le tenseur de données bruitées peut s'écrire :

$$\gamma_{XR}^{(n)} = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T}. \quad (\text{B.43})$$

De même, d'après les relations (B.29), (B.33) et (B.40), la matrice de covariance n -modale $\mathbf{Q}^{(n)}$ -pondérée du tenseur de données bruitées peut s'écrire :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = V_s^{(n)} \Gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T} + \sigma_\Gamma^{(n)2} \mathbf{I}_{I_n},$$

c'est à dire :

$$\Gamma_{RR}^{(n)} = \begin{bmatrix} V_s^{(n)} & | & V_b^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{OO}^{(n)} + \sigma_\Gamma^{(n)2} \mathbf{I}_{K_n} & 0 \\ 0 & \sigma_\Gamma^{(n)2} \mathbf{I}_{I_n - K_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^{(n)T} \\ V_b^{(n)T} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.44})$$

Dans la relation (B.44), $V_b^{(n)} \in \mathbb{R}^{(I_n - K_n) \times I_n}$ est une matrice contenant les vecteurs d'une base orthogonale du sous-espace bruit n -modal. D'autre part, l'hypothèse d'indépendance entre le signal et le bruit implique que le sous-espace bruit et le sous-espace signal n -modaux sont orthogonaux, ce qui peut se traduire par :

$$V_s^{(n)T} V_b^{(n)} = 0_{K_n \times (I_n - K_n)}, \quad (\text{B.45})$$

dans laquelle $0_{K_n \times (I_n - K_n)} \in \mathbb{R}^{K_n \times (I_n - K_n)}$ est la matrice nulle. Définissons enfin :

$$\Lambda_{\Gamma s}^{(n)} = \Gamma_{OO}^{(n)} + \sigma_\Gamma^{(n)2} \mathbf{I}_{K_n}, \quad (\text{B.46})$$

et :

$$\Lambda_{\Gamma b}^{(n)} = \sigma_\Gamma^{(n)2} \mathbf{I}_{I_n - K_n}. \quad (\text{B.47})$$

En insérant les dernières expressions des matrices $\gamma_{XR}^{(n)}$ et $\Gamma_{RR}^{(n)}$ (resp. relations (B.43) et (B.44)) dans l'expression du filtre de Wiener n -modal donnée à la relation (B.18) nous obtenons :

$$H_n = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T} \begin{bmatrix} V_s^{(n)} & | & V_b^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{\Gamma s}^{(n)-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\Gamma b}^{(n)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^{(n)T} \\ V_b^{(n)T} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.48})$$

Cette expression peut être réécrite comme :

$$H_n = \left[(V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T} V_s^{(n)}) \mid (V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} V_s^{(n)T} V_b^{(n)}) \right] \begin{bmatrix} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1} V_s^{(n)T} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\Gamma_b}^{(n)-1} V_b^{(n)T} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

En considérant la condition d'orthogonalité entre le signal et le bruit donnée à la relation (4.41) et le fait que les vecteurs colonnes de V_n soient unitaires :

$$V_n^{(n)} V_n^{(n)T} = I_{K_n}, \quad (\text{B.50})$$

l'expression finale du filtre de Wiener n -modal est donnée par :

$$H_n = V_s^{(n)} \gamma_{OO}^{(n)} \Lambda_{\Gamma_s}^{(n)-1} V_s^{(n)T}. \quad (\text{B.51})$$

Liste des figures

1.1	Matrice dépliant $R_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 I_3}$ dans le 1-mode du tenseur $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. Les dépliantes dans le 2-mode et 3-mode s'obtiennent en effectuant une permutation circulaire sur les n -modes du tenseur initial $\mathcal{R}$	11
2.1	(b) : Modélisation de l'image standard "Lena" en couleur (a), par un tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$. $I_1 = 256$: nombre de lignes. $I_2 = 256$: nombre de colonnes. $I_3 = 3$: nombre de canaux de couleur.	34
2.2	(a)-(d) : 4 trames consécutives d'une séquence d'images en niveaux de gris. (e) : Modélisation de cette séquence par le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$. I_1 : nombre de lignes. I_2 : nombre de colonnes. I_3 : nombre de trames obtenues par échantillonnage temporel. Un « vecteur temporel » représente l'évolution temporel du niveau de gris d'un pixel repéré par (i_1, i_2)	35
2.3	(a)-(d) : 4 trames consécutives d'une séquence d'images en couleur. (e) : Modélisation tensorielle de cette séquence par un tenseur d'ordre 4 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}$. I_1 : nombre de lignes. I_2 : nombre de colonnes. I_3 : nombre de canaux spectraux. I_4 : nombre de trames temporelles. Un « vecteur temporel » représente l'évolution temporel du niveau de gris d'un pixel repéré par (i_1, i_2)	36
2.4	Onde sismique plane et polarisée dont le vecteur d'onde forme un angle α avec le plan de l'antenne.	37
2.5	Modélisation tensorielle d'un signal sismique polarisé par le tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times 3}$. I_1 : nombre de capteurs multicomposantes. I_2 : nombre d'échantillons temporels. $I_3 = 3$: nombre de composantes de polarisation. . .	37
2.6	Image initiale de Lena en niveaux de gris, de taille 64×64 . (a) : Espace signal initial de dimension 64. (b) : Approximation de rang-31 de l'image initiale. Sous-espace signal de dimension 31. $ERR = 7.32 \cdot 10^{-4}$. (c) : Évolution des valeurs propres. (d) : Évolution de l'ERR en fonction du rang K.	38
2.7	Images en couleur étudiées issues des bases de données standard. Taille : 64×64 .	41
2.8	Image rectangulaire en couleur Lena2. Taille : 64×113	41
2.9	ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".	43
2.10	Images des HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena".	43
2.11	ERR pour la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena". .	44

2.12	Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena".	44
2.13	Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".	45
2.14	ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena2" de taille $64 \times 113 \times 3$	46
2.15	Images des HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Lena2". . . .	46
2.16	Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena2".	47
2.17	ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".	48
2.18	Images de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Sailboat". . .	48
2.19	Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".	49
2.20	ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondrian1".	50
2.21	Images de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Mondrian1". . .	50
2.22	Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondrian1".	51
2.23	Canaux rouge (a), vert (b) et bleu (c) de l'image Lena.	52
2.24	Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement rectiligne uniforme horizontal d'un carré noir sur fond blanc (Séquence 1).	57
2.25	Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement rectiligne uniforme oblique d'un carré noir sur fond blanc (Séquence 2).	57
2.26	Séquence d'images en niveaux de gris composée de 10 trames de taille 64×64 représentant le mouvement de rotation uniforme d'un disque en gradient angulaire de niveau de gris (Séquence 3).	57
2.27	ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.	59
2.28	Séquences résultant de la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à la Séquence 3.	60
2.29	ERR pour la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3. . .	61
2.30	Séquences résultant des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à la Séquence 3.	62
2.31	Comparaison des ERR pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.	63
3.1	Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".	76

3.2	Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Lena".	76
3.3	Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".	77
3.4	Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".	77
3.5	Comparaison des ERR obtenues par la HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 2, 3\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondriaan1".	78
3.6	Approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondriaan1".	78
3.7	Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.	83
3.8	Séquences résultant des approximations PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 1.	84
3.9	Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.	85
3.10	Séquences résultant des approximations PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 2.	86
3.11	Comparaison des ERR obtenues par HOSVD- (K, K, K_3) pour $K_3 \in \{1, 4, 7, 9, 10\}$, et par approximation PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité, du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence3.	87
3.12	Séquences résultant des approximations PACA- K_{PACA} avec contrainte de positivité du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence 3.	88
4.1	(a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Lena bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang- $(30, 30, 2)$. (c) : Image bruitée, $SNR = 11.4\text{dB}$. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD- $(30, 30, 2)$. (f) : Wiener multimodal Wmm- $(30, 30, 2)$	106
4.2	(a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Sailboat bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang- $(30, 30, 2)$. (c) : Image bruitée, $SNR = 8.7\text{dB}$. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD- $(30, 30, 2)$. (f) : Wiener multimodal Wmm- $(30, 30, 2)$	106
4.3	(a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Mondrian1 bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang- $(30, 30, 2)$. (c) : Image bruitée, $SNR = 6.3\text{dB}$. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD- $(30, 30, 2)$. (f) : Wiener multimodal Wmm- $(30, 30, 2)$	107

4.4	(a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Piments bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 7.9$ dB. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).	107
4.5	(a) :Évolution de l'ERR en fonction du SNR(dB) pour les différents filtrages de l'image Baboon bruitée (64×64). (b) : Image initiale de rang-(30, 30, 2). (c) : Image bruitée, $SNR = 6.6$ dB. (d) : Wiener bidimensionnel sur chaque canal de couleur (Wcc) de rang 30. (e) : HOSVD-(30, 30, 2). (f) : Wiener multimodal Wmm-(30, 30, 2).	108
4.6	Onde sismique plane et polarisée dont le vecteur d'onde est orthogonal au plan de l'antenne.	108
4.7	Trois composantes d'une onde sismique plane de vecteur d'onde orthogonal au plan de l'antenne.	109
4.8	Évolution de l'ERR en fonction du SNR pour chacune des méthodes. Rangs n -modaux $(K_1, K_2, K_3)=(8, 8, 3)$ pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) , et Wmm- (K_1, K_2, K_3) et rang $K = 8$ pour Wcc- K	110
4.9	Comparaison des méthodes de filtrage multimodal sur des données sismiques multicomposantes. Rangs n -modaux $(K_1, K_2, K_3)=(8, 8, 3)$ pour la HOSVD- (K_1, K_2, K_3) et Wmm- (K_1, K_2, K_3) , et rang $K = 8$ pour Wcc- K	111
4.10	(a) : Évolution de l'ERR en fonction du SNR (dB). (b) : Image initiale, LRTA-(20,20,2) de Lena. (c) : Image bruitée par un bruit additif gaussien corrélé ($SNR=8.8$ dB). (d) : Filtrage ACP multimodal classique par HOSVD-(20,20,2). (e) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur le cumulante d'ordre 4 (LRTA-C). (f) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur la matrice tranche cumulante d'ordre 4 (LRTA- $\mathbf{C}_1$).	121
4.11	(a) : Évolution de l'ERR en fonction du SNR (dB). (b) : Image initiale, LRTA-(20,20,2) de Baboon. (c) : Image bruitée par un bruit additif gaussien corrélé ($SNR=3.3$ dB). (d) : Filtrage ACP multimodal classique par HOSVD-(20,20,2). (e) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur le cumulante d'ordre 4 (LRTA-C). (f) : Filtrage ACP multimodal par LRTA-(20,20,2) basé sur la matrice tranche cumulante d'ordre 4 (LRTA- $\mathbf{C}_1$).	122
4.12	Comparaison du filtrage par ACP multimodal classique obtenu par HOSVD-(1,1,1) et du filtrage par ACP multimodal obtenu par LRTA-(1,1,1) basé sur la matrice tranche de cumulante d'ordre quatre (LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$) d'un signal sismique multicomposante bruité par un bruit gaussien corrélé ($SNR=-2$ dB).	124
4.13	Comparaison du filtrage par ACP multimodal classique obtenu par HOSVD-(1,1,1) et du filtrage par ACP multimodal obtenu par LRTA-(1,1,1) basé sur la matrice tranche de cumulante d'ordre quatre (LRTA- $\mathbf{C}_{1,100,1}$) d'un signal sismique multicomposante bruité par un bruit gaussien totalement corrélé ($SNR=-10$ dB).	126
A.1	ERR pour la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Sailboat".	134
A.2	Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Sailboat".	134

A.3	ERR pour la LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant "Mondrian1".	135
A.4	Images des LRTA- (K_1, K_2, K_3) du tenseur correspondant à "Mondrian1". . .	135
A.5	Évolution de l'ERR en fonction de K , pour la LRTA- (K, K, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant chacune des images en couleur, à K_3 fixé.	136
A.6	Évolution de l'ERR en fonction de K , pour la HOSVD- (K, K, K_3) du tenseur d'ordre 3 représentant chacune des images en couleur, à K_3 fixé.	138
A.7	ERR pour la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.	139
A.8	Séquences résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur correspondant à la Séquence1.	140
A.9	Comparaison des ERR résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) et de la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence1.	141
A.10	ERR pour la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.	142
A.11	Séquences résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) du tenseur correspondant à la Séquence2.	143
A.12	Comparaison des ERR résultant de la HOSVD- (k_1, k_2, k_3) et de la LRTA- (k_1, k_2, k_3) du tenseur d'ordre 3 représentant la Séquence2.	144

Bibliographie

- [1] H. AKAIKE, *A new look on statistical model identification*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, December 1974.
- [2] H. ANDREWS et C. PATTERSON, *Singular value decomposition and digital image processing*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 24, no. 1, pp. 26–53, February 1976.
- [3] H. ANDREWS et C. PATTERSON, *Singular Value Decomposition (SVD) image coding*, IEEE Trans. on Communications, (pp. 425–432), April 1976.
- [4] G. BIENVENU, *Méthode haute résolution pour la localisation de sources rayonnantes*, Onde Electrique, vol. 64, no. 4, pp. 28–37, 1984.
- [5] S. BOURENNANE et A. BENDJAMA, *Locating wide band acoustic sources using higher order statistics*, Applied Acoustics, vol. 63, pp. 235–251, May 2001.
- [6] R. BRO, *Multi-way analysis in the food industry*, PhD thesis, Royal Veterinary and Agricultural University, Denmark, 1998.
- [7] D. BURDICK, X. TU, L. MCGOWN et D. MILLICAN, *Resolution of multicomponent fluorescent mixtures by analysis of the excitation-emission-frequency array*, Journal of Chemometrics, vol. 4, pp. 15–28, 1990.
- [8] J. CARROLL et J. CHANG, *Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of "Eckart-Young" decomposition*, Psychometrika, vol. 35, pp. 283–319, 1970.
- [9] R. CATTELL, *Parallel proportional profiles and other principles for determining the choice of factors by rotation*, Psychometrika, vol. 9, pp. 267–283, 1944.
- [10] C. CHANG, *Hyperspectral Imaging, techniques for spectral detection and classification*, New-York : Kluwer Academic/Plemium édition, 2003.
- [11] P. CHARGÉ, Y. WANG et J. SAILLARD, *A root-music algorithm for non circular sources*, dans *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01)*, vol. 5, (pp. 2985 – 2988), 7-11 May 2001 2001.
- [12] P. CHARGÉ, Y. WANG et J. SAILLARD, *An extended cyclic music algorithm*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 7, pp. 1695 – 1701, July 2003.
- [13] P. CIARLET et J. LIONS, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod édition, 1998.
- [14] P. COMON, *Tensor decompositions, state of the art and applications*, dans *IMA Conf. mathematics in Signal Processing*, Warwick, UK, December 18-20, 2000.

- [15] P. COMON, *Tensor Decompositions*, Mathematics in Signal Processing V, J. G. McWhirter and I. K. Proudler édition, 2002.
- [16] L. DE LATHAUWER, *Signal Processing Based on Multilinear Algebra*, Phd thesis, K.U. Leuven, E.E. Dept. (ESAT), Belgium, September 1997.
- [17] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR et J. VANDEWALLE, *A multilinear singular value decomposition*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 21, pp. 1253–1278, April 2000.
- [18] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR et J. VANDEWALLE, *On the best rank- $(r_1, \dots, r_N)$ approximation of higher-order tensors*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 21, pp. 1324–1342, April 2000.
- [19] R. DUDA et P. HART, *Pattern classification and scene analysis*, John Wiley & Sons Edition, inc., 1973.
- [20] Y. ECKART et G. YOUNG, *The approximation of a matrix by another of lower rank*, Psychometrika, vol. 1, pp. 211–218, 1936.
- [21] F. FREIRE et T. ULRYCH, *Application of SVD to vertical seismic profiling*, Geophysics, vol. 53, pp. 778–785, 1988.
- [22] F. GLANGEAUD et J. MARI, *Wave separation*, Technip IFP édition, 1994.
- [23] G. GOLUB et C. VAN LOAN, *Matrix computations*, 3rd ed., Baltimore, The John Hopkins University Press édition, 1996.
- [24] R. GONZALEZ et R. WOOD, *Introduction to data compression*, Morgan Kaufmann (2nd ed.), New York, 1993.
- [25] R. HARSHMAN et M. LUNDY, *Research methods for multilmode data analysis*, (pp. 122–215), Praeger, New York, 1970.
- [26] M. HEMON et D. MACE, *The use of Karhunen-Loeve transform in seismic data prospecting*, Geophysical Prospecting, vol. 26, pp. 600–626, 1978.
- [27] K. HSU, *Wave separation and feature extraction of accoustic well-logging waveforme of triaxial recordings by singular value decomposition*, Geophysics, vol. 55, pp. 176–184, 1990.
- [28] G. JACKSON, I. MASON et S. GREENHALGH, *Principal component transforms of triaxial recordings by singular value decomposition*, Geophysics, vol. 56, no. 4, pp. 176–184, 1991.
- [29] T. JIANG et N. SIDIROPOULOS, *Kruskal's Permutation Lemma and the Identification of CANDECOMP/PARAFAC and Bilinear Models with Constant Modulus Constraints*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 52, no. 9, pp. 2625 – 2636, September 2004.
- [30] R. KAKARALA et P. OGUMBONA, *Signal analysis using a multiresolution form of the singular value decomposition*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, no. 5, pp. 724–735, May 2001.
- [31] E. KOFIDIS et P. REGALIA, *On the best rank-1 approximation of higher-order supersymmetric tensors*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 23, no. 3, pp. 863–884, March 2002.
- [32] A. KOKARAM, *Motion picture restoration*, Springer Edition, 1998.
- [33] T. KOLDA, *Orthogonal tensor decomposition*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 23, no. 1, pp. 243–255, March 2001.

- [34] P. KROONENBERG, *Three-mode principal component analysis*, DSWO press, Leiden, 1983.
- [35] P. KROONENBERG et J. DE LEEUW, *Principal component analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms*, *Psychometrika*, vol. 45, no. 1, pp. 69–97, March 1980.
- [36] J. KRUSKAL, *Three-way arrays : rank and uniqueness of trilinear decomposition, with application to arithmetic complexity and statistics*, *The Annals of Statistics*, vol. 18, pp. 95–138, 1977.
- [37] J. KRUSKAL, *Rank, decomposition, and uniqueness for 3-way and N-way arrays*, *Multi-way Data Analysis*, Amsterdam, The Netherlands : North Holland édition, 1988.
- [38] J. LACOUME, P. AMBLARD et P. COMON, *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Paris, Masson édition, 1997.
- [39] N. LE BIHAN, *Traitement algébrique des signaux vectoriels : Application à la séparation d'ondes sismiques.*, Phd thesis, INPG, Grenoble, France, 22 Octobre 2001.
- [40] N. LE BIHAN et G. GINOLHAC, *Subspace methods on 3d array*, dans *Workshop on Physics in Signal and Image Processing*, (pp. 359–364), Marseille, France, January 2001.
- [41] D. LEE et H. SEUNG, *Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization*, *Nature journal*, (pp. 788–791), 1999.
- [42] J. LELONG-FERRAND et J. ARNEAUDIES, *Cours de mathématiques. Tome 1 : Algèbre*, Dunod (3e ed.), 1998.
- [43] P. LEROUX, *Algèbre linéaire : une approche matricielle*, Quebec :Modulo, 1983.
- [44] T. LI et N. SIDIROPOULOS, *Blind digital signal separation using successive interference cancellation iterative least square*, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 11, pp. 3146–3152, November 2000.
- [45] X. LIU, *Ground roll suppression using the Karhunen-Loeve transform*, *Geophysics*, vol. 64, no. 2, pp. 564–566, 1991.
- [46] X. LIU et N. SIDIROPOULOS, *Kramèr-Rao lower bounds for low-rank decomposition of multidimensional arrays*, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 9, pp. 2074–2086, September 2001.
- [47] W. LU et S. PEI, *On optimal low-rank approximation of multidimensional discrete signals*, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II*, vol. 45, no. 3, pp. 417–422, March 1998.
- [48] J. MARS, *Séparation d'ondes*, Phd thesis, INPG, Grenoble, France, 1988.
- [49] J. MARS, F. GLANGEAUD, J. LACOUME, J. FOURMANN et S. SPITZ, *Separation of seismic waves*, dans *56th Conf. of the Society of Exploration Geophysicists (SEG)*, (pp. 489–492), New-Orleans, USA, 1987.
- [50] J. MENDEL, *Tutorial on higher order statistics (spectra) in signal processing and system theory : theoretical results and some applications*, dans *Proc. of the IEEE*, vol. 79, (pp. 278–305), March 1991.
- [51] M. MOONEN et B. DE MOOR, *SVD and Signal Processing III, Algorithms, applications and architecture*, Amsterdam, Elsevier édition, 1995.
- [52] E. MOREAU et N. THIRION, *Multichannel blind signal deconvolution using higher order statistics*, dans *IEEE Worksop on Statistical Signal and Array Processing*, (pp. 336 – 339), Corfu, Greece, June 24-26 1996.

- [53] H. MURASE et M. LINDENBAUM, *Combined techniques of singular value decomposition and vector quantization for image coding*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 4, no. 5, pp. 620–629, May 1995.
- [54] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Multidimensional filtering based on a tensor approach*, accepted in Signal Processing Journal, Elsevier.
- [55] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Multiway filtering based on second order and fourth order cumulants*, accepted in Applied Signal Processing, EURASIP.
- [56] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Fast optimal lower-rank tensor approximation*, dans *IEEE ISSPIT*, (pp. 621–625), Marrakesh, Morocco, December 18-21, 2002.
- [57] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Multidimensional estimation based on a tensor decomposition*, dans *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, St Louis, Missouri USA, September 28 - October 1, 2003.
- [58] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Multidimensional signal processing using lower rank tensor approximation*, dans *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Systems and Signal Processing*, Hong Kong, China, April 6-10, 2003.
- [59] D. MUTI et S. BOURENNANE, *Traitement du signal par décomposition tensorielle*, dans *GRETSI Symp.*, Paris, France, September 8-11 2003.
- [60] D. MUTI, S. BOURENNANE et M. GUILLAUME, *SVD-based filtering improvement by means of image rotation*, dans *IEEE International Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Montreal, Canada, May 17-21 2004.
- [61] D. O’LEARY et S. PELEG, *Digital image compression by outer product expansion*, IEEE Trans. on Communications, vol. 31, pp. 441–444, March 1983.
- [62] P. PAATERO et U. TAPPER, *Positive matrix factorization - a nonnegative factor model with optimal utilisation of error-estimates of data values*, Environmetrix, (pp. 111–126), 1994.
- [63] M. PATTICHIS, A. BOVIK, J. HAVLICEK et N. SIDIROPOULOS, *Multidimensional orthogonal FM transforms*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 10, no. 3, pp. 448–664, March 2001.
- [64] J. PESQUET et E. MOREAU, *Cumulant-based independence measures for linear mixture*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, no. 5, pp. 1947–1956, July 2001.
- [65] J. PESQUET et E. MOREAU, *A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, March 2001.
- [66] B. PORAT et B. FRIEDLANDER, *Direction finding algorithms based on higher-order statistics*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 39, no. 9, pp. 2016–2024, September 1991.
- [67] W. PRAAT et P. HART, *Digital image processing*, John Wiley & Sons Edition, inc., New York, 1978.
- [68] C. RAO et S. MITRA, *Generalized inverse matrices and its applications*, J. Wiley, New York, 1971.
- [69] J. RISSANEN, *A universal prior for integers and estimation by minimum description length*, The Annals of Statistics, vol. 11, no. 2, pp. 416–431, 1983.
- [70] T. SAITOH, T. KOMATSU, H. HARASIMA et H. MYAKAWA, *Still picture coding by multidimensionnal outer product expansion*, IECE Trans., vol. J68-B, pp. 547–548, April 1985.

- [71] E. SANCHEZ et B. KOVALSKI, *Tensorial calibration : II. second-order calibration*, Journal of Chemometrics, vol. 2, pp. 265–280, 1988.
- [72] E. SANCHEZ et B. KOVALSKI, *Tensorial resolution : a direct trilinear decomposition*, Journal of Chemometrics, vol. 4, pp. 29–45, 1990.
- [73] R. SANDS et F. YOUNG, *Component models for three-way data : an alternating least square algorithm with optimal scaling features*, Psychometrika, vol. 45, pp. 39–67, 1980.
- [74] K. SAYHOOD, *Digital Image Processing (2nd ed.)*, Adisson-Wesley, San Francisco, 2000.
- [75] K. SAYOOD, *Introduction to data compression (2nd edition)*, Multimedia Information and Systems, Morgan Kaumann, 2000.
- [76] R. SHERIFF, *Encyclopedic dictionary of exploration geophysics*, Society of Exploration Geophysicists édition, 1991.
- [77] Y. SHI et H. SUN, *Image and video compression for multimedia engineering, fundamentals, algorithms and standards*, Image Processing, 2000.
- [78] N. SIDIROPOULOS, *Generalizing Carathéodory's uniqueness of harmonic parametrization to N dimensions*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 47, no. 4, pp. 1687–1690, March 2001.
- [79] N. SIDIROPOULOS et R. BRO, *On the uniqueness of multilinear decomposition of N -way arrays*, Journal of Chemometrics, vol. 14, pp. 229–239, 2000.
- [80] N. SIDIROPOULOS, R. BRO et G. GIANNAKIS, *Parallel factor analysis in sensor array processing*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 48, no. 8, pp. 2377–2388, August 2000.
- [81] N. SIDIROPOULOS, G. GIANNAKIS et R. BRO, *Blind parafac receivers for DS-CDMA systems*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, 2000.
- [82] W. SKARBEK, *Generalized Hilbert scan in image printing*, dans *Theoretical Foundations of Computer Vision* (édité par R. KLETTE et W. G. KROPETSH), Akademik Verlag, Berlin, 1992.
- [83] J. TEN BERGE, P. KROONENBERG et J. DE LEEUW, *Some additional results on principal component analysis of three-mode data by means of alternating least square algorithms*, Psychometrika, vol. 52, no. 2, pp. 183–191, June 1987.
- [84] N. THIRION et E. MOREAU, *Generalized criteria for blind multivariate signal equalisation*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 9, no. 2, pp. 72–74, February 2002.
- [85] L. TUCKER, *The extension of factor analysis to three-dimensional matrices*, (pp. 109–127), Holt, Rinehart and Winston, NY, 1964.
- [86] L. TUCKER, *Some mathematical notes on three-mode factor analysis*, Psychometrika, vol. 31, pp. 279–311, 1966.
- [87] E. VACCARO, *SVD and Signal Processing, Algorithms, applications and architecture*, Amsterdam, Elsevier édition, 1988.
- [88] R. VACCARO, *SVD and signal processing II, Algorithms, applications and architecture*, Amsterdam, Elsevier édition, 1991.
- [89] M. VASILESCU et D. TERZOPOULOS, *Multilinear image analysis for facial recognition*, dans *IEEE Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR2002)*, vol. 2, Quebec city, Canada, 11-15, August 2002.
- [90] H. WANG et N. AHUJA, *Facial expression decomposition*, dans *9th IEEE International Conf. on Computer Vision (ICCV2003)*, vol. 2, Nice, France, 13-16, October 2003.

- [91] Y. WANG, *Localisation de sources dans le domaine temporel.*, Thèse de doctorat de l'université de rennes i, 1989.
- [92] M. WELLING et M. WEBER, *Positive tensor factorisation*, Pattern Recognition letters, vol. 22, no. 12, pp. 1255–1261, 2001.
- [93] N. YUEN et B. FRIEDLANDER, *Asymptotic performance analysis of blind signal copy using fourth order cumulant*, International Jour. Adaptative Contr. Singnal Proc., vol. 48, pp. 239–265, March 1996.
- [94] N. YUEN et B. FRIEDLANDER, *DOA in multipath : an approach using fourth order cumulant*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, no. 5, pp. 1253–63, 1997.
- [95] T. ZHANG et G. GOLUB, *Rank-one approximation to high order tensor*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 23, no. 2, pp. 534–550, November 2001.
- [96] A. ZOUBIR, Y. WANG et P. CHARGÉ, *New adaptative beamformers for estimation of spatially distributed sources*, dans *IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, vol. 3, (pp. 2643 – 2646), June 20-25 2004.

Résumé Cette thèse est consacrée à l'élaboration et l'étude de nouvelles techniques algébriques de traitement des données multidimensionnelles et multicomposantes (MM) modélisées par des tenseurs d'ordre supérieur, i.e. des tableaux multidimensionnels de valeurs.

Une étude comparative, dédiée à l'approximation d'images en couleur et de séquences d'images en niveaux de gris non bruitées, entre : (i) l'approximation tensorielle de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ inférieur (LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$), (ii) la troncature de rang- $(K_1, \dots, K_N)$ de la HOSVD, et (iii) l'approximation de rang- K_{PACA} inférieur d'un tenseur issue de la décomposition PARAFAC/CANDECOMP, est proposée. Le lien entre les valeurs des rangs tensoriels estimés à l'aide de ces méthodes, et le contenu (spatial et spectral) d'une image ainsi que le mouvement des objets dans une séquence est aussi étudié.

Deux nouvelles méthodes de filtrage multimodal des données MM bruitées sont aussi développées : (i) La première est élaborée en présence de bruit additif, gaussien, blanc et représente un filtrage de Wiener multimodal. Chacun des filtres de Wiener n -modaux optimaux H_n est déterminé en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le tenseur signal désiré, et le tenseur signal estimé obtenu en appliquant sur chaque n -mode du tenseur de données bruitées, le filtre H_n , par le biais de l'opérateur n -mode produit. Un algorithme numérique basé sur les moindres carrés alternés, permettant de déterminer les H_n , est proposé. (ii) La deuxième méthode est élaborée en présence de bruit additif, gaussien, corrélé et représente une amélioration de l'ACP multimodale réalisée par la LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$, grâce aux cumulants d'ordre quatre. Les résultats obtenus par ces deux méthodes appliquées au débruitage des images en couleur et des signaux sismiques multicomposantes bruitées améliorent ceux obtenus par les méthodes classiques.

Tensor Signal Processing, application to noisy color images and multicomponent seismic signals : This thesis is devoted to the elaboration of new algebraic processing technics for multidimensional and multicomponent (MM) data which can be modelled by higher order tensors, i.e. multiway arrays.

A comparative study, devoted to the approximation of color images and sequences of gray level images, between : (i) lower rank- $(K_1, \dots, K_N)$ tensor approximation (LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$), (ii) the rank- $(K_1, \dots, K_N)$ HOSVD truncation, and (iii) the lower rank- K_{PACA} of a tensor, based on PARAFAC/CANDECOMP decomposition, is proposed. The link between the tensor rank values, estimated thanks to the previous methods, and the spatial and spectral content of a color image as well as the object movement within a sequence of images is also studied.

Two new methods for multi-modal filtering of noisy MM data are also developed : (i) The first is elaborated in presence of additive white Gaussian noise and represents a new multimodal Wiener filtering. Each of the optimal n -mode Wiener filters, named H_n , is determined by minimizing the quadratic mean squared error between the desired tensor signal and the estimated tensor signal which is obtained by applying filter H_n , on each n -mode of the noisy data tensor, thanks to the n -mode product operator. An alternative least square based numerical algorithm, which enables the computation of filters H_n , is proposed. (ii) The second method is elaborated in presence of additive correlated Gaussian noise and represents a multimode PCA achieved by the LRTA- $(K_1, \dots, K_N)$ improved by the fourth order cumulants. The results obtained by these two new filtering methods applied to the denoising of color images and multicomponent seismic signals are improved compared to the ones obtained with the classical methods.

Discipline : Traitement du signal et des images.

Mots clés : Signaux multicomposantes, filtrage multimodal, débruitage, méthodes par sous-espaces, tenseurs, algèbre linéaire et multilinéaire, statistiques d'ordre supérieur, cumulants, décomposition de TUCKER3 et PARAFAC/CANDECOMP.

Key words : Multicomponent signals, multimode filtering, denoising, sub-space methods, tensors, linear and multilinear algebra, higher-order statistics, cumulants, TUCKER3 and PARAFAC/CANDECOMP decomposition.

Adresse :

Institut Fresnel, UMR CNRS 6133 et Université Aix-Marseille III,
D.U. de Saint Jérôme, 13397 Marseille - France.